

**Elettromagnetismo e Campi – Prof. C. Riva**  
**Appello del 29 agosto 2020**

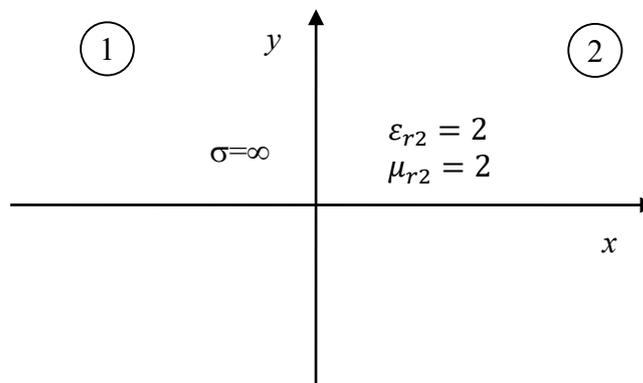
--	--	--	--	--

non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME \_\_\_\_\_

MATRICOLA \_\_\_\_\_

**Esercizio 1**



Si supponga che il semispazio  $x \leq 0$  sia occupato da un conduttore perfetto e il semispazio  $x > 0$ , sia occupato da un dielettrico con  $\epsilon_{r2} = 2$  e  $\mu_{r2} = 2$ , come mostrato in figura. Sapendo che nel mezzo 2,  $E_{2x} = 3$  (V/m) e  $H_{2y} = -3$  (A/m), determinare:

- $\vec{E}_1$  e  $\vec{H}_1$  nel mezzo 1;
- $E_{2y}$  e  $H_{2x}$  nel mezzo 2;
- la densità superficiale di carica  $\rho_s$  (C/m<sup>2</sup>) e la densità superficiale di corrente  $\vec{J}_s$  (A/m) all'interfaccia tra i due mezzi ( $x = 0$ ).

*Nota: si assuma che i campi siano statici e indipendenti.*

**Soluzione:**

Nel conduttore perfetto i campi sono nulli. Quindi:

$$\vec{E}_1 = 0$$

$$\vec{H}_1 = 0$$

Si conserva la componente tangente di  $\vec{E}$  e normale di  $\vec{B}$ :

$$E_{2y} = E_{1y} = 0$$

$$B_{2x} = \mu_2 H_{2x} = \mu_1 H_{1x} = 0 \Rightarrow H_{2x} = 0$$

Per la componente normale di  $\vec{D}$  vale la relazione (legge di Gauss):

$$D_{2x} - D_{1x} = \rho_s \Rightarrow \rho_s = \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_{2x} - \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_{1x} = \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_{2x} = 53.1 \text{ pC/m}^2$$

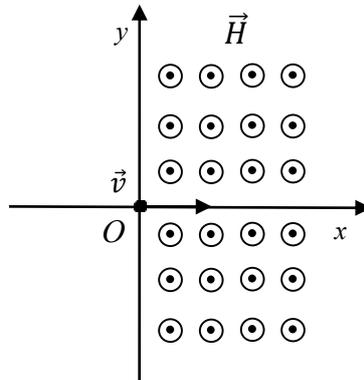
Per la componente tangente di  $\vec{H}$  vale la relazione (legge di Ampère):

$$H_{1y} - H_{2y} = -J_{sz} \Rightarrow J_{sz} = H_{2y} = -3 \text{ A/m}$$

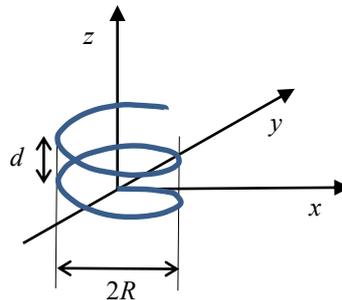
**Esercizio 2**

Un protone (carica  $q_p = 1.621 \cdot 10^{-19}$  C, massa  $m_p = 1.673 \cdot 10^{-27}$  kg) entra (nel vuoto) in un campo magnetico uniforme  $\vec{H} = 200 \vec{a}_z$  (A/m), nel punto  $O(x=0, y=0)$  con velocità pari a  $\vec{v} = 2 \cdot 10^4 \vec{a}_x + 5 \cdot 10^3 \vec{a}_z$  m/s (vedi figura). Indicare quale traiettoria percorre il protone e le coordinate  $(x, y, z)$  del punto in cui esce dalla zona ove è presente il campo magnetico ( $x=0$ ) e con quale (vettore) velocità.

Nota: Si osservi che il protone ha una componente della velocità in direzione parallela ad  $\vec{H}$ .

**Soluzione:**

Il protone nel campo magnetico uniforme si muove lungo un'elica con raggio pari ad  $R$  e passo  $d$  (in senso orario vista dall'asse  $z$  poiché la forza di Lorentz è diretta lungo  $-\vec{a}_x$ ).



Uguagliando forza centripeta e forza di Lorentz, si ottiene

$$R = \frac{m_p v_x}{q_p B} = \frac{m_p v_x}{q_p \mu_0 H} = 0.82 \text{ m}$$

Il periodo  $T$  (periodo di ciclotrone) è dato da

$$T = \frac{2\pi R}{v_x} = 2.58 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

Il protone dopo un intervallo di tempo  $T/2$  avrà percorso mezzo ciclo dell'elica e si troverà quindi sul piano  $(y, z)$ , nel punto  $P(x, y, z)$ , con

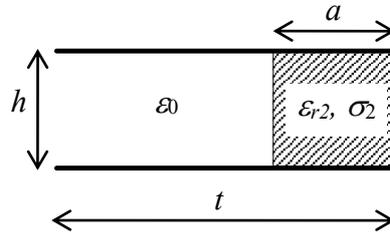
$$\begin{aligned} x &= 0 \text{ m} \\ y &= -2R = -1.64 \text{ m} \\ z &= \frac{d}{2} = v_z \cdot \frac{T}{2} = 0.65 \text{ m} \end{aligned}$$

La velocità nel punto  $P$  sarà la stessa ma in verso opposto in direzione  $x$  e la stessa in direzione  $z$ :

$$\vec{v} = -2 \cdot 10^4 \vec{a}_x + 5 \cdot 10^3 \vec{a}_z \text{ (m/s)}$$

**Esercizio 3**

Sia data la linea piatta in figura, costituita da conduttori perfetti, parte in aria e parte riempita da un dielettrico con perdite di conduzione ( $\sigma_2 = 2 \cdot 10^{-5}$  S/m) avente  $\epsilon_{r2} = 4$  ( $\mu = \mu_0$  ovunque,  $h = 1$  cm,  $t = 4$  cm,  $a = 1.3$  cm). Si calcoli l'attenuazione in dB/km e la velocità di propagazione in m/s.

**Soluzione:**

La capacità  $c$  per unità di lunghezza è pari a:

$$c = c_1 + c_2 = \epsilon_0 \frac{(t-a)}{h} + \epsilon_0 \epsilon_{r2} \frac{a}{h} = 69.9 \text{ pF/m}$$

L'induttanza per unità di lunghezza è pari a:

$$l = \mu_0 \frac{h}{t} = 0.31 \text{ } \mu\text{H/m}$$

L'impedenza caratteristica è pari a:

$$Z_c = \sqrt{\frac{l}{c}} = 67.0 \text{ } \Omega$$

La conduttanza  $g$  per unità di lunghezza è uguale a:

$$g = \frac{\sigma_2 a}{h} = 2.6 \cdot 10^{-5} \text{ S/m}$$

E quindi l'attenuazione è pari a:

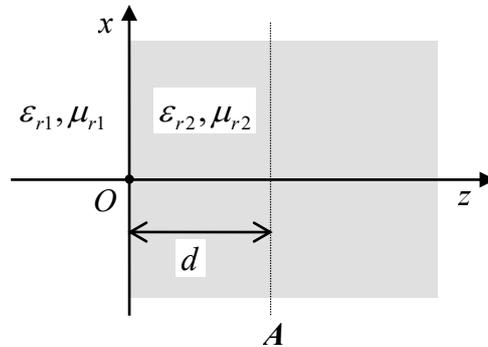
$$\alpha = \frac{g Z_c}{2} = 8.7 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Np}}{\text{m}} = 8.7 \cdot 10^{-4} \cdot 8686 \frac{\text{dB}}{\text{km}} = 7.57 \frac{\text{dB}}{\text{km}}$$

La velocità di propagazione è:

$$v = \frac{1}{\sqrt{lc}} \cong 2.133 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

**Esercizio 4**

Un'onda piana uniforme si propaga in aria ( $\epsilon_{r1} = 1, \mu_{r1} = 1$ ) in direzione  $+z$ , con campo elettrico nell'origine pari a  $\vec{E}_i(0,0,0) = 5 \vec{a}_y$  (V/m), e incide su un materiale come in figura ( $\epsilon_{r2} = 3 - 0.2j, \mu_{r2} = 3$ ). Calcolare i vettori fasori campo elettrico e magnetico alla sezione  $A$  ( $d = 50$  cm), alla frequenza di 100 MHz, e la densità di potenza trasportata dall'onda progressiva alla medesima sezione.

**Soluzione:**

L'impedenza caratteristica del mezzo 1 (aria) è pari a

$$\eta_1 = \eta_0 = 377 \Omega$$

La tangente di perdita nel secondo mezzo è pari a

$$\text{tg}(\varphi) = \frac{\epsilon_{r2}''}{\epsilon_{r2}'} = 0.07 \ll 1$$

Il secondo mezzo è quindi un buon dielettrico e quindi:

$$\eta_2 \cong \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_{r2}}{\epsilon_{r2}}} = 377 \Omega$$

$$\alpha_2 \cong \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_{r2}''}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_{r2}}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}'}} = 0.21 \text{ Np/m}$$

$$\beta_2 \cong \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \mu_{r2} \epsilon_{r2}'} = 6.2875 \text{ rad/m}$$

Inoltre

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r2} \epsilon_{r2}}} = \frac{\lambda_0}{3} = 1 \text{ m}$$

$$\frac{d}{\lambda_2} = 0.5$$

Quindi

$$\Gamma_0 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = 0$$

L'onda incidente non subisce quindi nessuna riflessione alla sezione  $z = 0$ :

$$E_{20}^+ = E_{10}^+ = E_i = 5 \text{ V/m}$$

Lo sfasamento alla sezione  $A$  dell'onda diretta nel mezzo 2 è pari a  $\pi$  (il percorso è pari a mezza lunghezza d'onda) mentre l'ampiezza è ridotta a causa dell'attenuazione:

$$\vec{E}_2^+(z=d) = E_2^+(z=d) \vec{a}_y = E_{20}^+ \exp(-\beta_2 d) \exp(-\alpha_2 d) \vec{a}_y = -4.5 \vec{a}_y \text{ V/m}$$

Il campo magnetico è dato da

$$\vec{H}_2^+(z=d) = \vec{H}_2^+(z=d) = \frac{|E_2^+(z=d)|}{\eta_2} \vec{a}_x = 0.012 \vec{a}_x \text{ A/m}$$

dove la direzione è quella che forma una terna destrorsa insieme alla direzione del campo elettrico ( $-\vec{a}_y$ ) e alla direzione di propagazione ( $\vec{a}_z$ ).

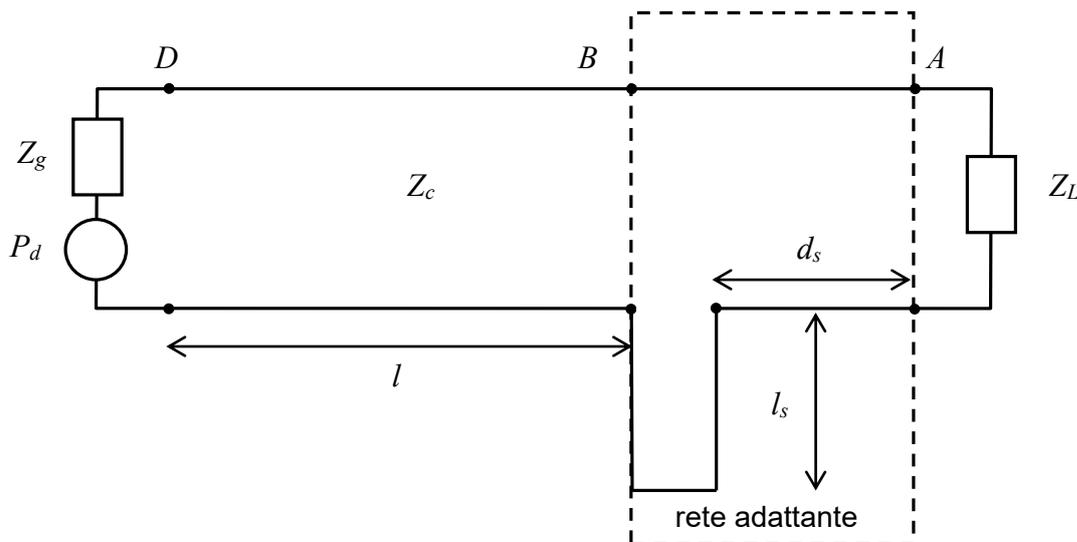
La densità di potenza trasportata dall'onda progressiva nel mezzo 2 alla sezione  $A$  è pari a

$$S_2^+ = \frac{|E_2^+(z=d)|^2}{2\eta_2} = 0.027 \text{ W/m}^2$$

**Esercizio 5**

Sia dato un generatore avente frequenza di 250 MHz, impedenza interna  $Z_g = 50 \Omega$  e tensione a vuoto  $V_g = 100 \text{ V}$ , collegato ad un carico  $Z_L = 75 + j25 \Omega$  attraverso una linea di trasmissione senza perdite ( $\epsilon_r = 2$ ), avente impedenza caratteristica  $Z_c = 50 \Omega$ , e lunghezza  $l = 1.5 \text{ m}$  (vedi figura in assenza di rete adattante).

1. Si calcoli la potenza dissipata sul carico (in assenza della rete adattante).
2. Si progetti la rete stub serie in corto circuito fra le sezioni  $A$  e  $B$  in modo da adattare il carico alla linea (specificare le caratteristiche delle linee di trasmissione utilizzate).
3. Si calcoli la potenza dissipata sul carico nelle condizioni al punto 2).

**Soluzione:**

Essendoci adattamento fra generatore e linea, la potenza dissipata sul carico è pari a:

$$P_L = P_d(1 - |\Gamma_L|^2) = 23.1 \text{ W}$$

$$P_d = \frac{V_g^2}{8Z_g} = 25 \text{ W}$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = 0.231 + 0.153j = 0.277e^{j0.588}$$

In caso di adattamento:

$$P_L = P_d = 25 \text{ W}$$

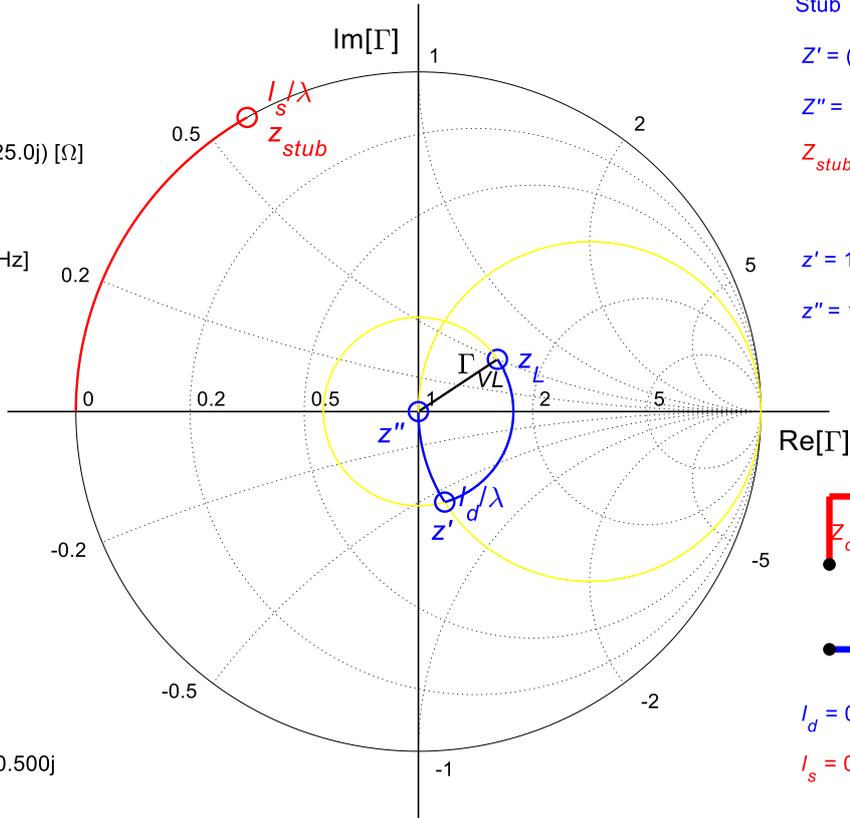
$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} f} = 0.849 \text{ m}$$

**Carta di Smith delle impedenze**

$Z_{cl} = 50 [\Omega]$   
 $Z_{cs} = 50 [\Omega]$   
 $Z_G = 50 [\Omega]$   
 $Z_L = (75.0+25.0j) [\Omega]$

$f = 250.0 [\text{MHz}]$   
 $\epsilon_r = 2.0$

$z_{cl} = 1$   
 $z_G = 1$   
 $z_L = 1.500+0.500j$



Stub serie in c.c.

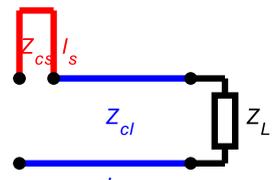
$Z' = (50.0-28.9j) [\Omega]$

$Z'' = 50.0 [\Omega]$

$Z_{stub} = 28.9j [\Omega]$

$z' = 1.000-0.577j$

$z'' = 1.000$



$l_d = 0.149 \lambda = 0.127 [\text{m}]$

$l_s = 0.083 \lambda = 0.071 [\text{m}]$