ttromagnetismo e Campi – Prof. C. Riva
Appello del 1 marzo 2017

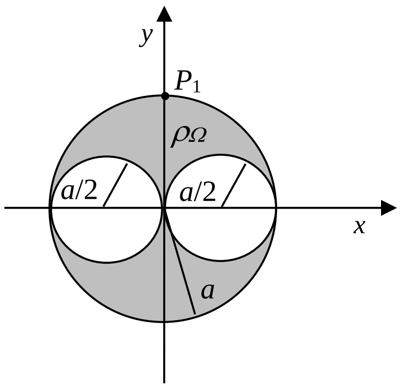
non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME ______________________________

MATRICOLA ______________________________

FIRMA ______________________________

Sia data una distribuzione di carica volumetrica (ρ_Ω = 4 nC/m^3) in una sfera di raggio a = 2 cm, in cui sono ricavate due cavità sferiche (vuote), come in figura. Calcolare il vettore campo elettrico nell'origine degli assi O(0, 0) e nel punto P_1 (0, 2 cm).
Suggerimento: Si utilizzi il principio di sovrapposizione degli effetti.



Soluzione:

Il problema si risolve assumendo tre distribuzioni sferiche (la cui sovrapposizione dà luogo alla distribuzione del problema originario):

1. Distribuzione sferica con raggio a centrata nell'origine e densità di carica volumetrica $+\rho_\Omega$;
2. Distribuzione sferica con raggio a/2 centrata nel punto di coordinate (a/2, 0) e densità di carica volumetrica $-\rho_\Omega$;
3. Distribuzione sferica con raggio a/2 centrata nel punto di coordinate ($-a$/2, 0) e densità di carica volumetrica $-\rho_\Omega$.

Nell'origine degli assi la distribuzione 1 genera un campo nullo (come si verifica facilmente applicando la legge di Gauss), mentre le distribuzioni 2 e 3 generano contributi uguali e opposti. Il campo totale è pertanto nullo.
Nel punto P_1 (0, 2 cm), la distribuzione 1, genera un campo pari a:

$$\vec{E}_1(P_1) = \frac{4/3 \cdot \pi a^3 \rho_\Omega}{4\pi a^2 \varepsilon_0} \vec{a}_y = 3 \text{ (V/m)}$$

Le distribuzioni 2 e 3 generano, invece, 2 campi elettrici che hanno componenti uguali e opposte in direzione x e uguali e concordi in direzione $-y$ (la carica è negativa).
Il modulo del campo elettrico dovuto alla distribuzione 2 o 3 è pari a:

$$\left|\vec{E}_2(P_1)\right| = \left|\vec{E}_3(P_1)\right| = \frac{4/3 \cdot \pi \left(\frac{a}{2}\right)^3 \rho_\Omega}{4\pi \frac{5}{4} a^2 \varepsilon_0} = 0.3 \text{ (V/m)}$$

L'angolo che $\vec{E}_2(P_1)$ e $\vec{E}_3(P_1)$ formano con l'asse *y* è pari a:

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{a/2}{a}\right) = 26.56° = 0.464 \text{ rad}$$

Quindi le componenti di $\vec{E}_2(P_1)$ e $\vec{E}_3(P_1)$ in direzione *y* sono uguali e pari a:

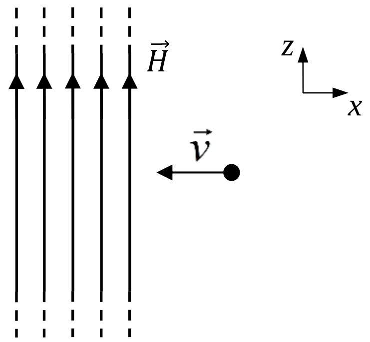
$$E_{2y}(P_1) = E_{3y}(P_1) = -\left|\vec{E}_2(P_1)\right| \cos(\vartheta) = 0.27 \text{ (V/m)}$$

Si ha quindi:

$$\vec{E}_{tot}(P_1) = \vec{E}_1(P_1) - 2 \cdot E_{2y}(P_1)\, \vec{a}_y = 2.47\, \vec{a}_y \text{ (V/m)}$$

Esercizio 2

Un protone (carica q_p = 1.6·10^{-19} C e massa m = 1.6726·10^{-27} kg) si muove nel vuoto con velocità $\vec{v} = -2\,\vec{a}_x$ (m/s) attraversando un campo magnetico uniforme $\vec{H} = \vec{a}_z$ (A/m), come in figura. Descrivere la traiettoria della particella nel suo moto all'interno del campo magnetico. Calcolare quindi il vettore campo elettrico necessario per consentire alla carica di muoversi di moto rettilineo.
Suggerimento: la forza prodotta dal campo elettrico deve bilanciare la forza di Lorentz.



Soluzione:

La traiettoria è circolare in quanto la forza di Coulomb si mantiene ortogonale alla velocità della particella (fino a quando essa non esce dal campo magnetico).
La forza di Lorentz è pari a:

$$\vec{F}_L = Q\vec{v} \times \vec{B} = Q\vec{v} \times \mu_0\vec{H} = -Qv\mu_0 H\,\vec{a}_x \times \vec{a}_z = \mu_0 QvH\vec{a}_y = 4 \cdot 10^{-25}\,\vec{a}_y \text{ (N)}$$

Si ha inoltre:

$$F_L = m\frac{v^2}{R}$$

E quindi:

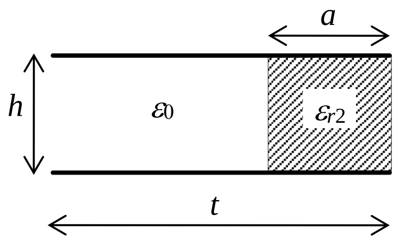
$$R = m\frac{v^2}{F_L} = 1.66 \text{ cm}$$

Per bilanciare tale forza è necessario un campo elettrico dato da:

$$\vec{E} = \frac{-\vec{F}_L}{Q} = -2.51 \cdot 10^{-6}\,\vec{a}_y \text{ (V/m)}$$

Esercizio 3

Data la linea microstriscia con piccole perdite in figura ($\mu = \mu_0$ ovunque, h = 1 cm, t = 4 cm, a = 1.5 cm, ε_{r2} = 3), si calcoli la velocità di propagazione e l'attenuazione in dB/km, alla frequenza f=200 MHz, sapendo che le conducibilità dei conduttori è pari a $\sigma_c = 5 \cdot 10^7$ (S/m).
Suggerimento: si trascurino le perdite nel calcolo dell'impedenza caratteristica della linea.



Soluzione:

La capacità c per unità di lunghezza è la somma delle due capacità (poste in parallelo) delle parti di larghezza t-a e a, rispettivamente:

$$c = c_1 + c_2 = \varepsilon_0 \frac{t-a}{h} + \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \frac{a}{h} = 62 \text{ pF/m}$$

L'induttanza per unità di lunghezza è pari a:

$$l = \mu_0 \frac{h}{t} = 0.31 \ \mu\text{H/m}$$

La velocità di propagazione è quindi:

$$v = \frac{1}{\sqrt{lc}} = 2.27 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

L'impedenza caratteristica è pari a:

$$Z_c = \sqrt{\frac{l}{c}} = 71.2 \ \Omega$$

La resistenza per unità di lunghezza della linea è uguale a:

$$r = \frac{2}{\sigma_c \delta t} = 0.2 \ \Omega/\text{m} \qquad \left(\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_0 \sigma_c}} = 5 \ \mu\text{m} \right)$$

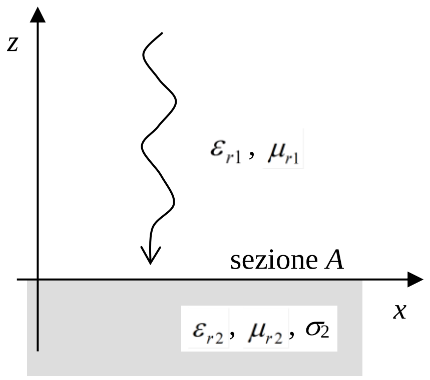
E quindi l'attenuazione è pari a:

$$\alpha = \frac{r}{2Z_c} = 0.0014 \ \frac{\text{Np}}{\text{m}} = 0.0014 \cdot 8686 \ \frac{\text{dB}}{\text{km}} = 12.12 \ \frac{\text{dB}}{\text{km}}$$

Esercizio 4

Sia data un'onda piana che si propaga (frequenza 300 MHz) in aria ($\mu_{r1} = 1$, $\varepsilon_{r1} = 1$,) verso la superficie di separazione con un buon dielettrico ($\mu_{r2} = 2$, $\varepsilon_{r2}=2$, $\sigma_2 = 10^{-5}$ S/m), come in figura. Sapendo che il vettore fasore dell'onda incidente alla sezione A (z = 0 m) è pari a $\vec{E}_{1A}^{+} = \vec{a}_x$ (V/m), calcolare la densità di potenza riflessa e il vettore fasore del campo elettrico dell'onda trasmessa nel buon dielettrico alla sezione z = -5 m.

Nota: si utilizzino le approssimazioni valide per buoni dielettrici.



Soluzione:

La tangente di perdita del secondo mezzo è data da:

$$\mathrm{tg}(\phi) = \frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} = 3 \cdot 10^{-4} \ll 1$$

Si ha, quindi, per il buon dielettrico:

$$\eta_2 \cong \sqrt{\frac{\mu_0\mu_{r2}}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}} = 377\ \Omega$$

$$\alpha_2 \cong \frac{\sigma_2}{2}\sqrt{\frac{\mu_0\mu_{r2}}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}} = 0.0019 \text{ Np/m}$$

$$\beta_2 = \omega\sqrt{\mu_0\mu_{r2}\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} = 12.57 \text{ rad/m}$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}} = 0.5 \text{ m}$$

Poiché $\boldsymbol{\eta_1 = \eta_2 = 377}\ \Omega$, il coefficiente di riflessione è nullo e la densità di potenza riflessa è quindi anch'essa nulla.

Si ha quindi che tutta l'onda viene trasmessa nel mezzo 2:

$$\vec{E}_{2A} = \vec{E}_{1A}^{+} = \vec{a}_x$$

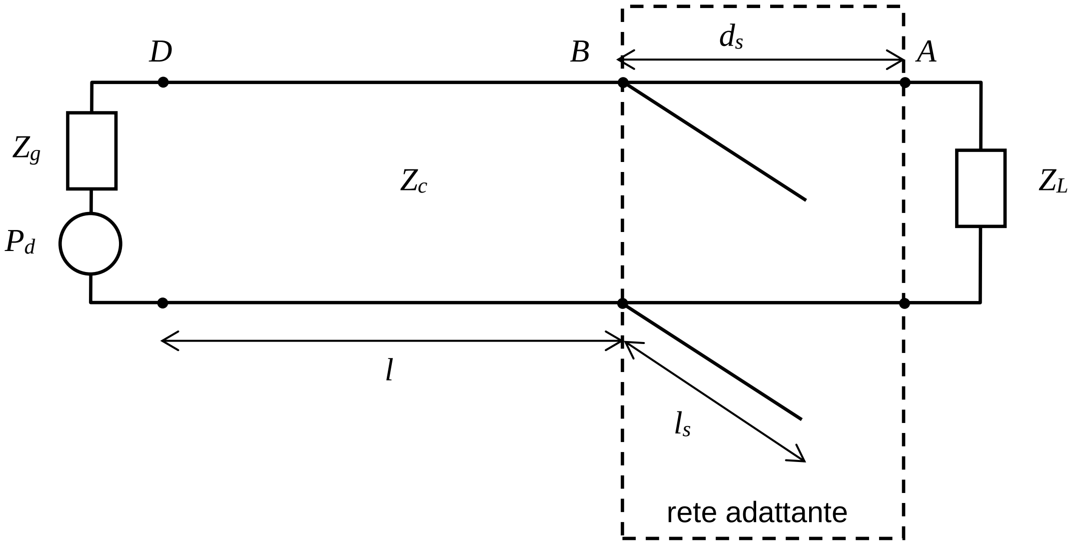
e quindi (si ricordi che nel mezzo 2 l'onda si propaga in direzione $-z$ e non si sfasa perché 5 m è un multiplo intero di λ_2):

$$\vec{E}_2(z = -5 \text{ m}) = \vec{E}_{2A}\, e^{-\alpha_2 \cdot z} e^{-\beta_2 \cdot 5} = \vec{E}_{2A}\, e^{-\alpha_2 \cdot z} e^{-2\pi\frac{z}{\lambda_2}} = 0.9905\, \vec{a}_x \text{ (V/m)}$$

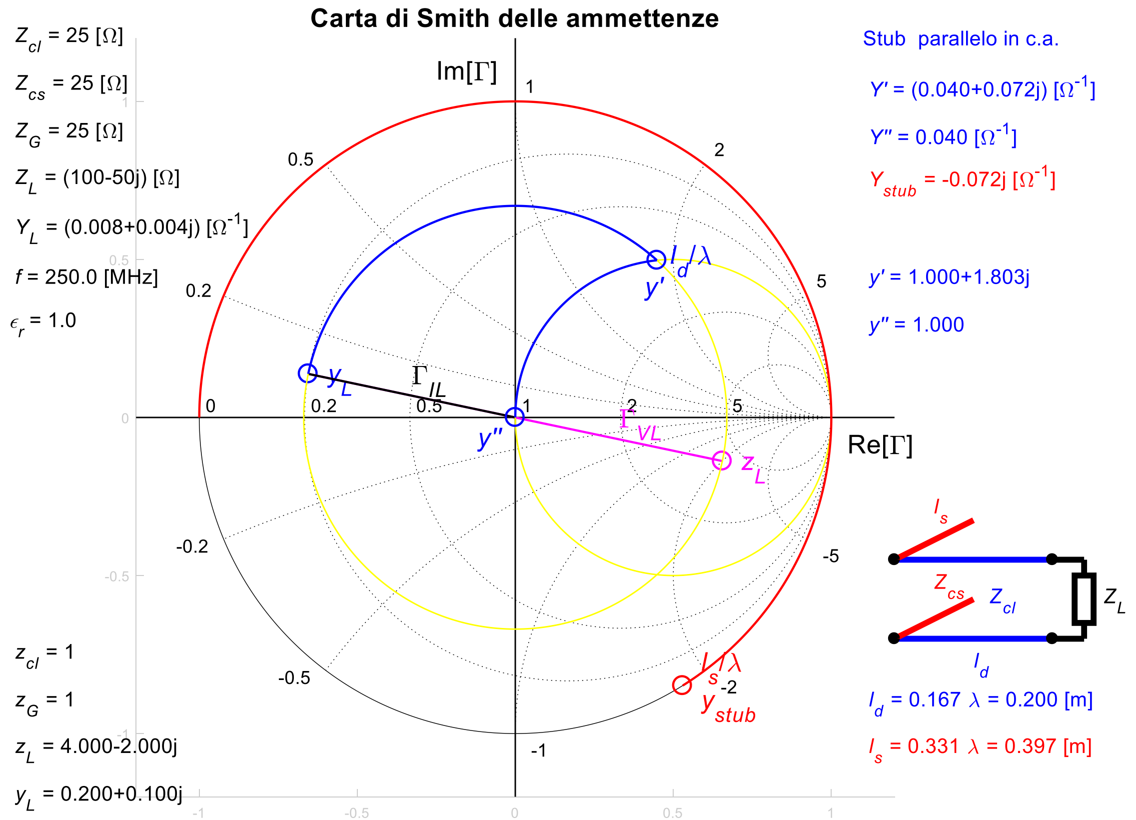
Esercizio 5

Sia dato un generatore avente frequenza di 250 MHz, impedenza interna Z_g = 25 Ω e tensione a vuoto V_g = 50 V, collegato ad un carico Z_L = 100 - j50 Ω attraverso una linea di trasmissione senza perdite (ε_r=1), avente impedenza caratteristica Z_c=25 Ω, e lunghezza l (vedi figura in assenza di rete adattante).

1. Si progetti la rete stub parallelo in circuito aperto fra le sezioni A e B in modo da adattare il carico alla linea (specificare le caratteristiche delle linee di trasmissione utilizzate).
2. Si calcoli la potenza dissipata sul carico nelle condizioni al punto 1) con l = 2 m.



Soluzione:



Essendoci adattamento fra carico e linea e fra linea e generatore, la potenza dissipata sul carico è pari alla potenza disponibile del generatore:

$$P_L = P_d = \frac{V_g^2}{8Z_g} = 12.5\ \mathrm{W}$$