Elettromagnetismo e Campi – Prof. C. Riva
Appello del 10 febbraio 2017

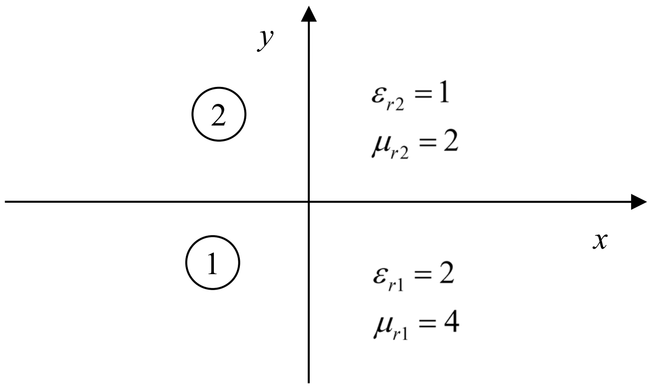
non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME ____________________

MATRICOLA ____________________

FIRMA ____________________

Esercizio 1



Dati i campi elettrico e magnetico (statici e indipendenti), nel mezzo 1 ($y < 0$):

$\vec{E}_1 = -1 \cdot \vec{a}_x + 2 \cdot \vec{a}_y$ (V/m)

$\vec{H}_1 = 2 \cdot \vec{a}_x - 1 \cdot \vec{a}_y$ (A/m),

determinare i campi elettrico e magnetico nel mezzo 2 (y > 0), $\vec{E}_2$ e $\vec{H}_2$, nel caso in cui all'interfaccia ($y = 0$) tra i due semispazi ci sia una densità superficiale di carica $\rho_s = 2 \cdot 10^{-12}$ (C/m^2) e una densità superficiale di corrente $\vec{J}_s = +2\vec{a}_z$ (A/m).

Soluzione:

Per determinare $\vec{E}_2$:
Si conserva la componente tangente:

$E_{2x} = E_{1x} = -1$

La componente normale di $\vec{D}$ dipende dalla carica superficiale ρ_s:

$$D_{2y} - D_{1y} = \rho_s \qquad \Rightarrow \qquad E_{2y} = \frac{\varepsilon_1 E_{1y} + \rho_s}{\varepsilon_2} = 4.2 \text{ (V/m)}$$

Dunque $\vec{E}_2 = -1 \cdot \vec{a}_x + 4.2 \cdot \vec{a}_y$ V/m

Per determinare $\vec{H}_2$, si conserva la componente normale di $\vec{B}$:

$$B_{2y} = B_{1y} \qquad \Rightarrow \qquad H_{2y} = \frac{\mu_1 H_{1y_s}}{\mu_2} = -2 \text{ A/m}$$

La componente normale di $\vec{H}$ dipende dalla presenza della corrente superficiale $\vec{J}_s$:

$$H_{2x} - H_{1x} = -|J_s| \qquad \Rightarrow \qquad H_{2x} = H_{1x} - |J_s| = 0 \text{ A/m}$$

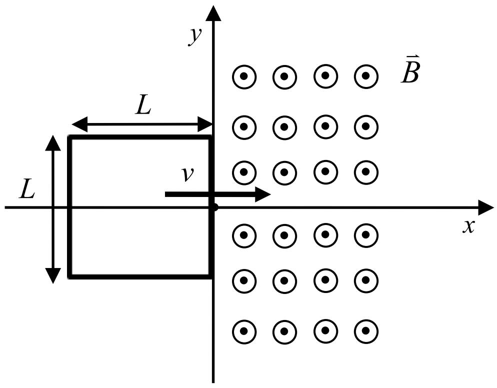
Dunque $\vec{H}_2 = -2 \cdot \vec{a}_y$ (A/m)

Esercizio 2

Una spira metallica quadrata (lato L = 5 cm, resistenza R = 100 Ω) e giacente sul piano *x*-*y* si muove con velocità uniforme $\vec{v} = 10\vec{a}_x$ m/s in direzione dell'asse x in presenza di un campo magnetico (frequenza pari a 1 GHz) dato da

$$\begin{aligned} &\vec{H} = 0 && \text{for } x < 0 \\ &\vec{H} = 10\cos(\omega t)\vec{a}_z \ (\text{A/m}) && \text{for } x \geq 0 \end{aligned}.$$

La figura mostra la posizione della spira nell'istante $t_0 = 0$.
Calcolare il valore della corrente (A) che scorre nella spira all'istante t = 25 ms.



Soluzione:

Il tempo impiegato dalla spira ad entrare completamente nel campo magnetico tempo variante è pari a:

$$\tau = \frac{L}{v} = \frac{0.05}{10} = 5 \text{ ms}$$

All'istante t = 25 ms quindi la spira è completamente immersa nel campo magnetico.
La forza elettromotrice indotta è quindi pari a:

$$fem(t) = -\frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}t}$$

Dove (essendo il campo magnetico spazialmente costante nella spira):

$$\phi_m = \mu_0 |H_z| L^2 = \mu_0 \, L^2 \, 10 \cos(\omega t)$$

E quindi:

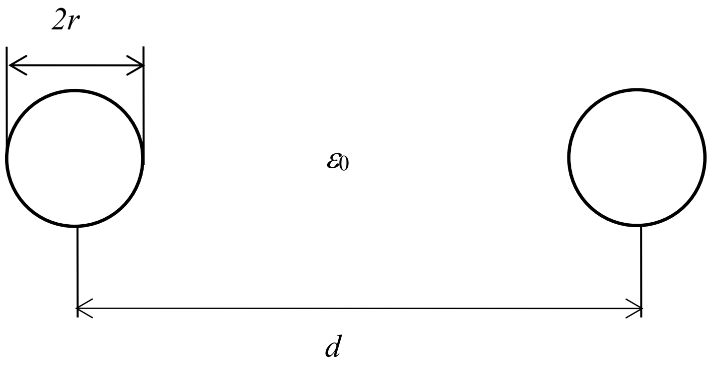
$$fem(t) = \omega \, \mu_0 \, L^2 10 \sin(\omega t)$$

Per t = 25 ms:

$$I(t = 0.025) = \frac{fem(t=0.025)}{R} = \frac{\omega \, \mu_0 \, L^2 10 \sin(\omega 0.025)}{R} \cong 20 \text{ nA}$$

Esercizio 3

Sia data una linea bifilare ($\varepsilon = \varepsilon_0$) realizzata con conduttori uguali non ideali ($\sigma_c = 5.7 \cdot 10^7$ S/m) di raggio pari a $r = 1.5$ mm e posti a una distanza $d = 2$ cm (vedi figura). Calcolare l'attenuazione in (dB/km) alla frequenza di 300 MHz e la velocità di propagazione delle onde sulla linea
Nota: utilizzare l'approssimazione dei conduttori sottili



Soluzione:

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{r_c}{2Z_c}}$$

$$\boldsymbol{Z_c = \sqrt{\frac{l}{c}} = \frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{c}}$$

La capacità per unità di lunghezza per una linea bifilare vale:

$$\boldsymbol{c = \frac{2\pi\varepsilon_0}{log(d^2/r^2)} = 1.07 \cdot 10^{-11}} \ \left(\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\right)$$

$$\boldsymbol{Z_c = 310.6\ \Omega}$$

$$\boldsymbol{r_c = \frac{2}{\sigma_c \delta 2\pi r} = 0.97}\ \frac{\Omega}{\mathrm{m}}$$

$$\boldsymbol{\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma_c}} = 3.85\ \mu m}$$

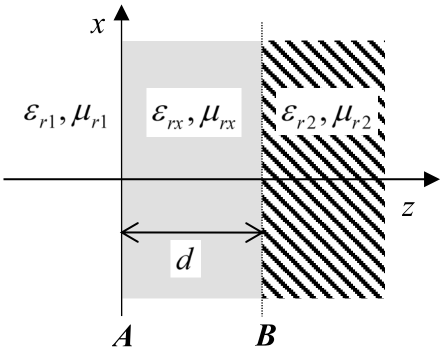
$$\boldsymbol{\alpha = \frac{r_c}{2Z_c} = 0.0016}\ \frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}} = \boldsymbol{13.5}\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{km}}$$

Poiché la linea è omogenea:

$$\boldsymbol{v_f = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} \cong 3 \cdot 10^8\ \frac{m}{s}}$$

Esercizio 4

Sia data un'onda piana uniforme alla frequenza *f* = 300 MHz, che si propaga in aria ($\varepsilon_{r1} = 1$, $\mu_{r1} = 1$), con campo elettrico nell'origine pari a $\vec{E}_i(0,0,0) = 5\,\vec{a}_x$ (V/m) e incide su un mezzo ($\varepsilon_{r2} = 4$, $\mu_{r2} = 2$) come in figura (senza strato ε_{rx} fra le sezioni *A* e *B*). Dimensionare uno strato dielettrico non magnetico ($\mu_{rx} = 1$) da interporre fra l'aria e il mezzo 2 (calcolare ε_{rx} e *d*) in modo da non avere riflessioni alla sezione *A*. In tali condizioni calcolare la densità di potenza trasmessa al mezzo 2.
Suggerimento: si utilizzi uno strato λ/4.



Soluzione:

Si calcolano le impedenze intrinseche dei mezzi 1 e 2:

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_{r1}}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}} = 376.7\ \Omega$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_{r2}}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}} = 266.4\ \Omega$$

Dunque l'impedenza intrinseca dello strato λ/4 deve essere:
e distanze normalizzate valgono:

$$\eta_x = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_{rx}}} = \sqrt{\eta_1\eta_2} = 316.8\ \Omega$$

Quindi:

$$\varepsilon_{rx} = \left(\frac{\eta_0}{\eta_x}\right)^2 = 1.41$$

$$d = \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_{rx}}\,4} = 21.2\ \text{cm}$$

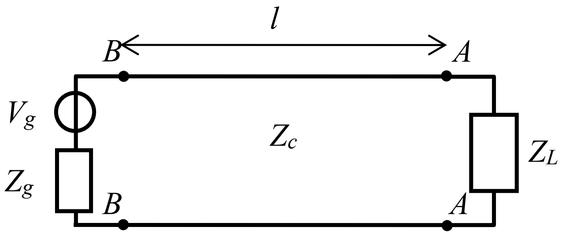
Non c'è riflessione e dunque la densità di potenza trasmessa all'ultimo mezzo vale:

$$S = S_i = \frac{|E_i|^2}{2\eta_1} = 33\ \text{mW/m}^2$$

Esercizio 5

Sia dato un generatore (Z_g = 75 Ω e V_g = 50 V) operante alla frequenza di 300 MHz e collegato ad un carico $Z_L = (75 + j\,75)\ \Omega$ attraverso una linea di trasmissione con perdite, avente impedenza caratteristica Z_c=75 Ω, costante di attenuazione 30 dB/km e lunghezza l = 20 m (vedi figura). Si calcoli:

a) la potenza dissipata sul carico;
b) la potenza dissipata sulla linea;
c) il modulo della tensione sul carico.



f = 300 MHz
Z_g = 75 Ω
V_g = 50 V
Z_c = 75 Ω
Z_L = 75 + j 75 Ω
α = 30 dB/km
l = 20 m

Soluzione:

La costante di attenuazione vale:
α = 30 dB/km = 0.0035 Np/m
Il coefficiente di riflessione alla sezione A vale:
$$\Gamma_A = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = 0.2 + j0.4$$
$|\Gamma_A| = 0.447$
Poiché c'è adattamento fra generatore e linea, si ha:
$$P_0^+ = P_d = \frac{V_g^2}{8Z_g} = 4.17\ \text{W}$$
La potenza dissipata sul carico è quindi:
$$P_L = P_d e^{-2\alpha l}(1 - |\Gamma_A|^2) = 2.91\ \text{W}$$

La potenza che passa la sezione B (carico + linea) è:
$$P_B = P_0^+(1 - |\Gamma_0|^2) = P_d(1 - |\Gamma_L|^2 e^{-4\alpha l}) = 3.54\ \text{W}$$
La potenza dissipata sulla linea è quindi:
$$P_{diss} = P_B - P_L = 0.63\ \text{W}$$
Infine si ha:
$$P_L = \frac{|V_L|^2}{2}\,\text{Re}\left[\frac{1}{Z_L}\right] = 2.91\ \text{W}$$
E quindi:
$$|V_L| = \sqrt{\frac{2P_L}{\text{Re}\left[\frac{1}{Z_L}\right]}} = 30.2\ \text{V}$$