**Elettromagnetismo e Campi – Prof. C. Riva**
**Appello del 13 luglio 2017**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

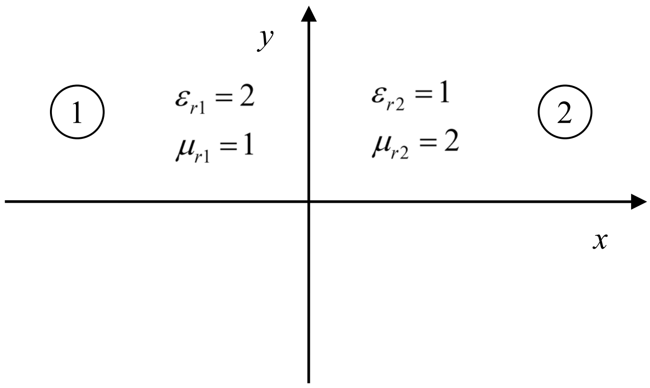
**non scrivere nella zona soprastante**

COGNOME E NOME ______________________

MATRICOLA ______________________

FIRMA ______________________

**Esercizio 1**




Dati i campi elettrico e magnetico (statici e indipendenti), nel mezzo 2 ($y > 0$):

$\vec{E}_2 = -2 \cdot \vec{a}_x - 1 \cdot \vec{a}_y$ (V/m)

$\vec{H}_2 = -2 \cdot \vec{a}_x - 1 \cdot \vec{a}_y$ (A/m),

determinare i campi elettrico e magnetico nel mezzo 1 ($y < 0$), $\vec{E}_1$ e $\vec{H}_1$, nel caso in cui all'interfaccia ($y = 0$) tra i due semispazi ci sia una densità superficiale di carica $\rho_s = 3 \cdot 10^{-12}$ (C/m$^2$) e una densità superficiale di corrente $\vec{J}_s = -2\vec{a}_z$ (A/m).

**Soluzione:**

Per determinare $\vec{E}_1$:

Si conserva la componente tangente:

$E_{1y} = E_{2y} = -1$

La componente normale di $\vec{D}$ dipende dalla carica superficiale $\rho_s$:

$$D_{2x} - D_{1x} = \rho_s \qquad \Rightarrow \qquad E_{1x} = \frac{\varepsilon_2 E_{2x} - \rho_s}{\varepsilon_1} = -1.17 \text{ (V/m)}$$

Dunque $\vec{E}_1 = -1 \cdot \vec{a}_x - 1.17 \cdot \vec{a}_y$ V/m

Per determinare $\vec{H}_1$, si conserva la componente normale di $\vec{B}$:

$$B_{1x} = B_{2x} \qquad \Rightarrow \qquad H_{1y} = \frac{\mu_2 H_{2x}}{\mu_1} = -4 \text{ A/m}$$

La componente tangente di $\vec{H}$ dipende dalla presenza della corrente superficiale $\vec{J}_s$:

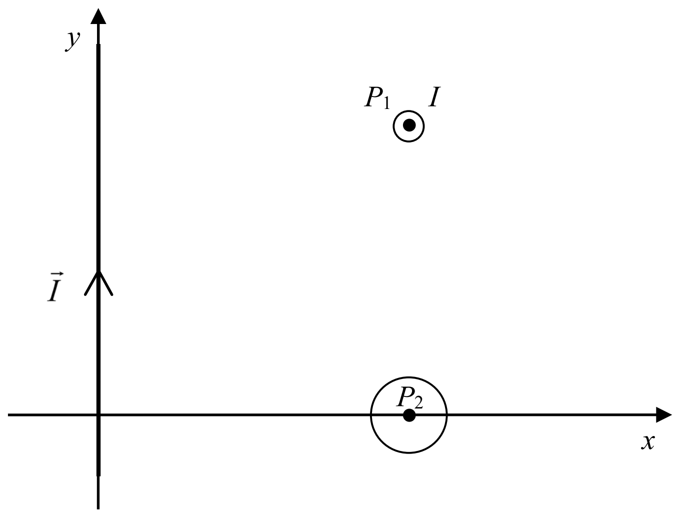
$$H_{2y} - H_{1y} = J_{sz} \qquad \Rightarrow \qquad H_{1y} = H_{2y} - J_{sz} = 1 \text{ A/m}$$

Dunque $\vec{H}_1 = -4 \cdot \vec{a}_x + 1 \cdot \vec{a}_y$ (A/m)

**Esercizio 2**

Sia dato un filo metallico sovrapposto all'asse $y$ e uno ortogonale al piano $(x, y)$ e passante per il punto $P_1$(1 m, 1 m), come in figura. Entrambi sono percorsi da una corrente $\mathcal{I}(t) = 12.56\cos(\omega t)$ (A), nel verso positivo dell'asse $y$ (il primo) e uscente dal piano del foglio (il secondo). Calcolare, alla frequenza $f$ = 1 GHz, la corrente indotta in una spira circolare di raggio $r$ = 1 cm, il cui centro coincide con il punto $P_2$(1 m, 0) e con resistenza pari a $R$ = 50 Ω.

*Nota: il disegno non è in scala; assumere che il campo densità di flusso magnetico prodotto dalle correnti sia costante sulla superficie della spira circolare.*




**Soluzione:**

Il campo magnetico prodotto dalla corrente ortogonale al piano $(x, y)$ e passante per il punto $P_1$ è parallelo all'asse $x$ e quindi non genera flusso nella spira.

Il campo densità di flusso magnetico generato dal filo sovrapposto all'asse $y$, a distanza $d$ = 1 m dal filo stesso vale:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\vec{a}_z = -2.5\cdot 10^{-6}\cos(\omega t)\,\vec{a}_z \quad (\mathrm{Wb/m^2})$$

Assumendo che tale campo sia costante sulla superficie della spira circolare (il cui raggio è molto minore di $d$) il flusso del campo magnetico attraverso la spira circolare vale:

$$\phi_m = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\cos(\omega t)\cdot \pi r^2 = 7.9\cdot 10^{-10}\cos(\omega t) \quad (\mathrm{Wb})$$

La forza elettromotrice indotta vale (a parte il segno):

$$|fem| = \left|-\frac{d\phi_m}{dt}\right| = (7.9\cdot 10^{-10}\,\omega\sin(\omega t)) = 4.96\sin(\omega t) \ \ (\mathrm{V})$$

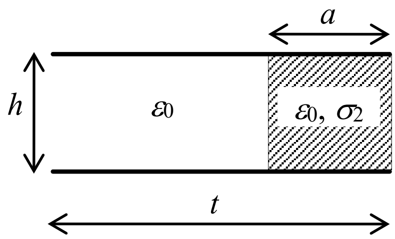
La corrente indotta sulla spira è quindi:

$$\mathcal{I}_s(t) = \frac{|fem|}{R} = 99.2\sin(\omega t) \quad (\mathrm{mA})$$

**Esercizio 3**

Data la linea microstriscia con piccole perdite in figura ( $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ ovunque, conduttori perfetti, $h$ = 1 cm, $t$ = 3 cm, $a$ = 1 cm, $\sigma_2 = 10^{-4}$ S/m), si calcoli la velocità di propagazione e l'attenuazione in dB/km.

*Suggerimento: si trascurino le perdite nel calcolo dell'impedenza caratteristica della linea.*




**Soluzione:**

Poiché la permettività elettrica e la permeabilità magnetica sono uguali in tutta la sezione, la velocità di propagazione è quindi:

$$v = \frac{1}{\sqrt{lc}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

La capacità $c$ per unità di lunghezza è pari a:

$$c = \varepsilon_0 \frac{t}{h} = 26.6 \text{ pF/m}$$

L'induttanza per unità di lunghezza è pari a:

$$l = \mu_0 \frac{h}{t} = 0.42 \text{ µH/m}$$

L'impedenza caratteristica è pari a:

$$Z_c = \sqrt{\frac{l}{c}} = 125.6\ \Omega$$

La conduttanza $g$ per unità di lunghezza è uguale a:

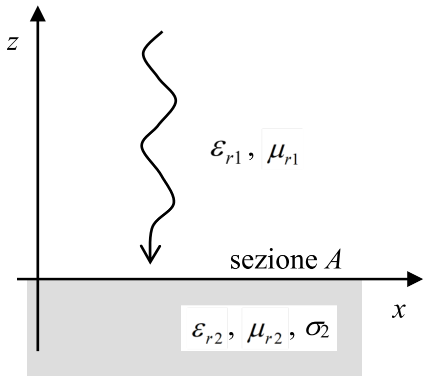
$$g = \frac{\sigma_2 a}{h} = 3.3 \cdot 10^{-5} \text{ S/m}$$

E quindi l'attenuazione è pari a:

$$\alpha = \frac{g Z_c}{2} = 0.0021\ \frac{\text{Np}}{\text{m}} = 0.0021 \cdot 8686\ \frac{\text{dB}}{\text{km}} = 18.18\ \frac{\text{dB}}{\text{km}}$$

**Esercizio 4**

Sia data un'onda piana che si propaga in aria ($\mu_{r1} = 1$, $\varepsilon_{r1} = 1$) alla frequenza $f = 300$ MHz e incide, come in figura, sulla superficie di separazione con il mezzo 2 ($\mu_{r2} = 4$, $\varepsilon_{r2} = 4$, $\sigma_2 = 10^{+5}$ S/m). Sapendo che il vettore fasore dell'onda incidente alla sezione $A$ ($z = 0$ m) è pari a $\vec{E}_{1A}^{+} = 2 \cdot \vec{a}_y$ (V/m), calcolare la posizione (coordinata $z$) della sezione con il primo massimo di campo elettrico totale in aria e il valore del modulo di tale campo. Calcolare quindi il valore del modulo del campo magnetico alla sezione $z = -5$ m (nel mezzo 2).




**Soluzione:**

La tangente di perdita del secondo mezzo è data da:

$$\mathrm{tg}(\phi) = \frac{\sigma_2}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} = 29.96 \gg 1$$

Si ha, quindi, per il buon conduttore:

$$\eta_2 \cong \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mu_{r2}}{2\sigma_2}} = 48.7\,(1 + j)\ \Omega$$

$$\alpha_2 = \beta_2 \cong \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mu_{r2} \sigma_2}{2}} = 97.3 \text{ Np/m}$$

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{\beta_2} = 0.0645 \text{ m}$$

Per l'aria, invece:

$$\eta_1 \cong 377\ \Omega$$

$$\alpha_1 = 0$$

$$\beta_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 6.2875 \text{ Np/m}$$

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{\beta_1} = 1 \text{ m}$$

Poiché $\boldsymbol{\eta_1 = 377}\ \Omega$, il coefficiente di riflessione $\Gamma_0$ alla sezione $z = 0$ è dato da:

$$\Gamma_0 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -0.75 + 0.2j \qquad |\Gamma_0| = 0.77 \qquad \varphi_{\Gamma_0} \cong 165°$$

Per arrivare alla sezione del primo massimo bisogna ruotare sulla carta di Smith di un angolo pari proprio a 165° (2.88 rad); si ha allora:

$$\beta_1 z_{max} = 2.88 \qquad z_{max} = 0.46 \text{ m}$$

Il campo elettrico trasmesso alla sezione $z = 0$ è dato da:

$$\vec{E}_{tA} = \vec{E}_{1A}^{+}(1 + \Gamma_0) = (0.5 + 0.4j)\vec{a}_y$$

e alla sezione $z$ = -5 m:

$$\vec{E}_2(z = -5\text{ m}) = \vec{E}_{tA} e^{-\alpha_2 \cdot 5}\, e^{-\beta_2 \cdot 5} \cong 0\text{ (V/m)}$$

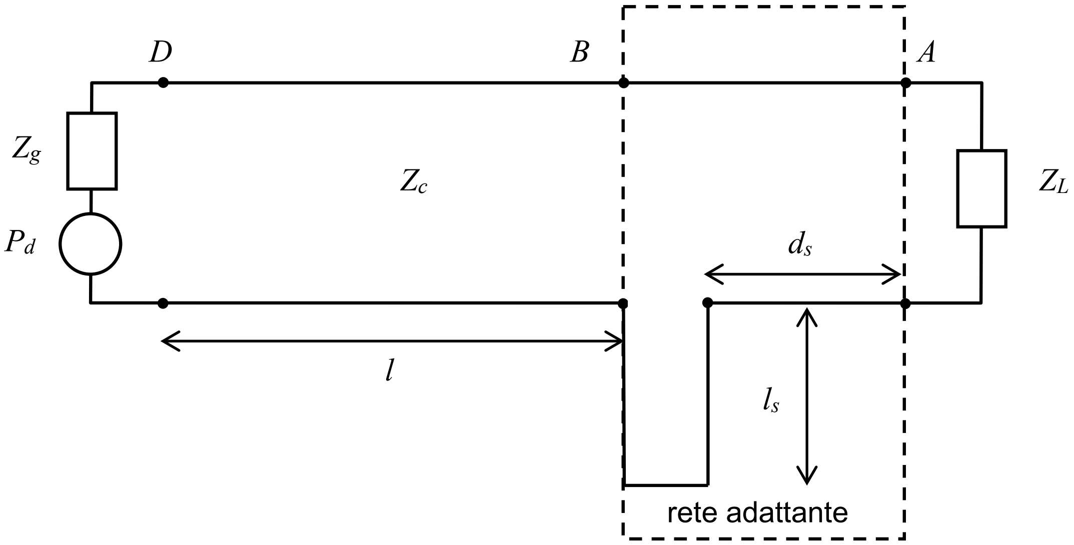
Il campo magnetico vale quindi:

$$\vec{H}_2(z = -5\text{ m}) = \frac{|\vec{E}_2\,(z=-5\text{ m})|}{\eta_1}\,\vec{a}_x \cong 0\text{ (mA/m)}$$

**Esercizio 5**

Sia dato un generatore avente frequenza di 150 MHz, impedenza interna $Z_g$ = 50 Ω e tensione a vuoto $V_g$ = 80 V, collegato ad un carico $Z_L$ = 100 + $j$50 Ω attraverso una linea di trasmissione senza perdite ($\varepsilon_r$ = 4), avente impedenza caratteristica $Z_c$ = 50 Ω, e lunghezza $l$ = 2 m (vedi figura in assenza di rete adattante).

1. Si calcoli la potenza dissipata sul carico (in assenza della rete adattante).
2. Si progetti la rete stub serie in corto circuito fra le sezioni $A$ e $B$ in modo da adattare il carico alla linea (specificare le caratteristiche delle linee di trasmissione utilizzate).
3. Si calcoli la potenza dissipata sul carico nelle condizioni al punto 2).




**Soluzione:**
Essendoci adattamento fra generatore e linea, la potenza dissipata sul carico è pari a:

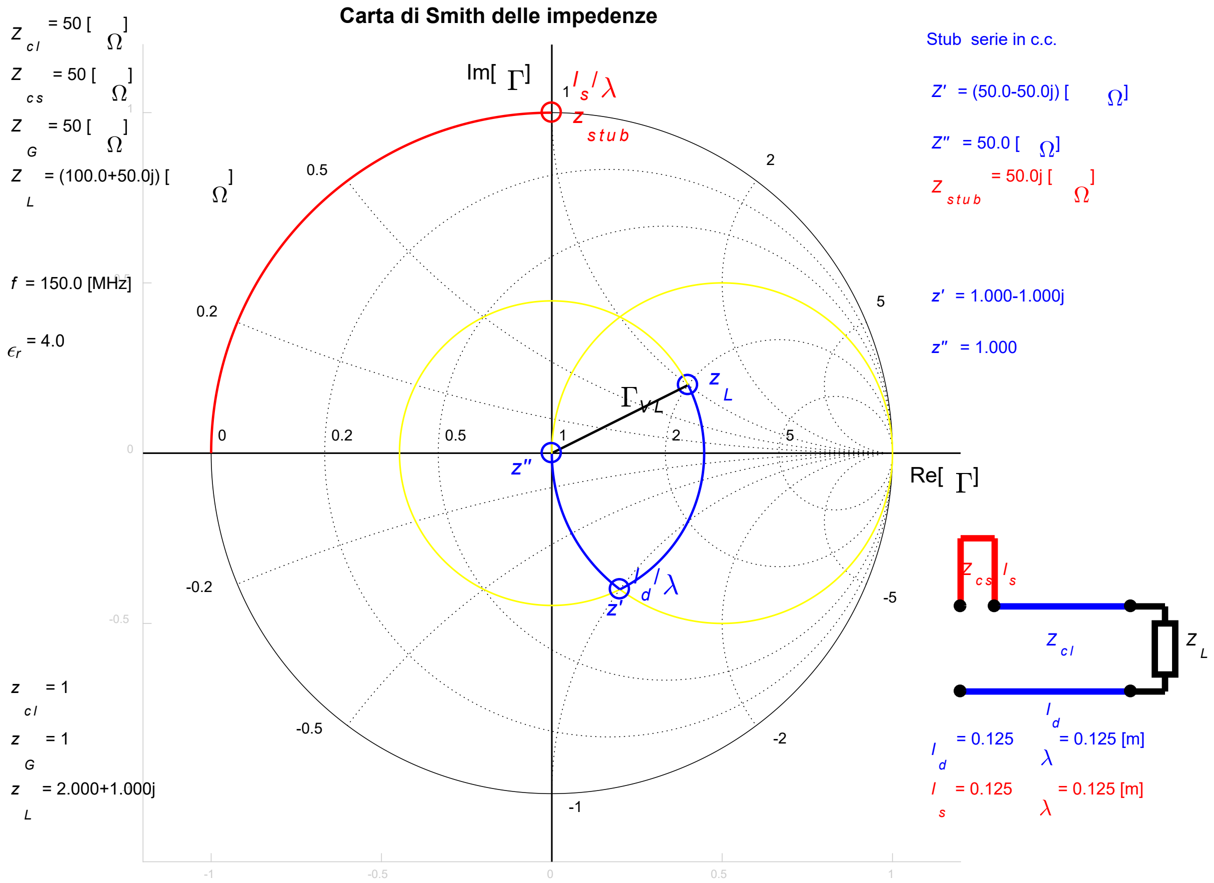
$$P_L = P_d(1 - |\Gamma_L|^2) = 12.8 \text{ W}$$

$$P_d = \frac{V_g^2}{8Z_g} = 16 \text{ W}$$

$$\Gamma_L = \frac{z_L - z_c}{z_L + z_c} = 0.4 + 0.2j = 0.447e^{j0464}$$

In caso di adattamento:

$$P_L = P_d = 16 \text{ W}$$



Carta di Smith delle impedenze
Z cl = 50 [Ω]
Z cs = 50 [Ω]
Z G = 50 [Ω]
Z L = (100.0+50.0j) [Ω]
f = 150.0 [MHz]
εr = 4.0
z cl = 1
z G = 1
z L = 2.000+1.000j
Stub serie in c.c.
Z' = (50.0-50.0j) [Ω]
Z'' = 50.0 [Ω]
Z stub = 50.0j [Ω]
z' = 1.000-1.000j
z'' = 1.000
Im[Γ]
Re[Γ]
l s / λ
z stub
z L
Γ VL
z''
z'
l d / λ
Z cs
l s
Z cl
Z L
l d
l d = 0.125 λ = 0.125 [m]
l s = 0.125 λ = 0.125 [m]