

Elettromagnetismo e Campi – Prof. C. Riva
Appello del 1 febbraio 2016

--	--	--	--

non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME _____

MATRICOLA _____

FIRMA _____

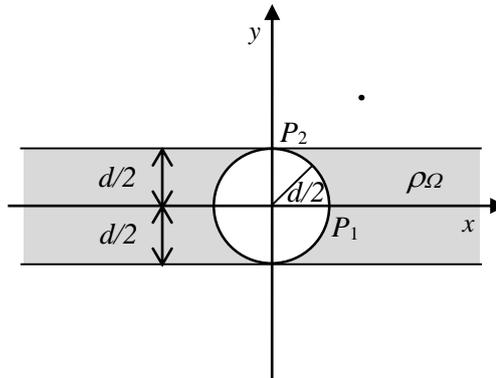
Esercizio 1

Sia data la seguente distribuzione di carica volumetrica uniforme (vedi figura):

$$\rho_{\Omega} = \begin{cases} 1 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^3 & \text{per } |y| < d/2 \\ 0 & \text{per } |y| \geq d/2 \end{cases}$$

con $d = 1 \text{ cm}$ in cui è presente una regione cava sferica di raggio $d/2$ come in figura. Calcolare il vettore campo elettrico nell'origine $O(0, 0)$ e nei punti $P_1(d/2, 0)$ e $P_2(0, d/2)$.

Suggerimento: Si sfrutti la simmetria del problema e il principio di sovrapposizione degli effetti.



Traccia di soluzione:

La distribuzione di carica del problema si può vedere come la somma di una prima distribuzione di carica volumetrica uniforme $+\rho_{\Omega}$ per $|y| \leq d/2$ e di una seconda distribuzione di carica volumetrica uniforme $-\rho_{\Omega}$ in una sfera di raggio $d/2$ con centro nell'origine.

Per la prima distribuzione, per motivi di simmetria, il campo elettrico è diretto in direzione y ed è uguale in valore assoluto a pari distanza dal piano (x, z) . Essendo la distribuzione di carica volumetrica positiva sarà diretto in direzione $+y$ per $y > 0$ e in direzione $-y$ per $y < 0$.

Applicando la legge di Gauss ad un volume cilindrico di base S e altezza $2y$ e posizionato in modo simmetrico rispetto al piano (x, z) si ottiene, per $|y| \leq d/2$:

$$E'_y = \frac{\rho_{\Omega} y}{\epsilon_0}$$

e, quindi:

$$\vec{E}'(O) = 0$$

$$\vec{E}'(P_1) = 0$$

$$\vec{E}'(P_2) = \frac{\rho_{\Omega} d}{\epsilon_0 2} \vec{a}_y = 5.65 \vec{a}_y \quad \left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right)$$

Per la seconda distribuzione, invece si può ancora utilizzare la legge di Gauss e si trova:

$$\begin{aligned} \vec{E}''(0) &= 0 \\ \vec{E}''(P_1) &= \frac{-\rho_{\Omega} 4/3 \cdot \pi \cdot (d/2)^3}{4\pi (d/2)^2} \vec{a}_x = -1.88 \vec{a}_x \quad \left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right) \\ \vec{E}''(P_2) &= \frac{-\rho_{\Omega} 4/3 \cdot \pi \cdot (d/2)^3}{4\pi (d/2)^2} \vec{a}_y = -1.88 \vec{a}_y \quad \left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right) \end{aligned}$$

Poiché:

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}' + \vec{E}''$$

Si ha:

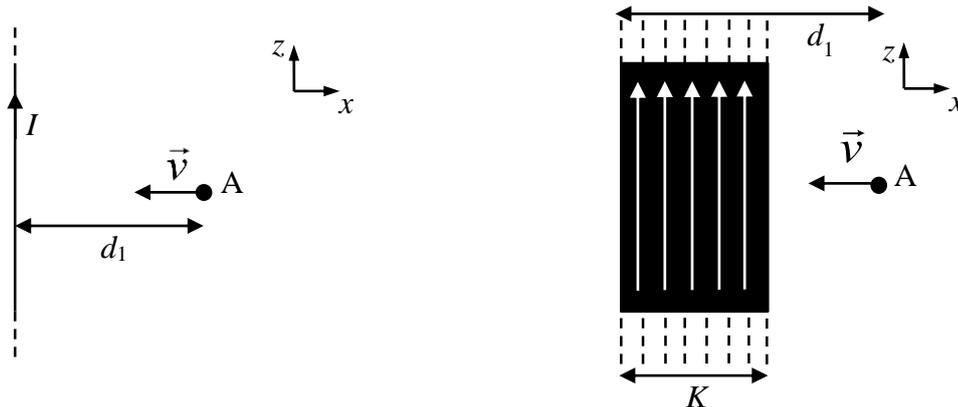
$$\begin{aligned} \vec{E}_{tot}(0) &= 0 \\ \vec{E}_{tot}(P_1) &= -1.88 \vec{a}_x \quad \left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right) \\ \vec{E}_{tot}(P_2) &= 3.77 \vec{a}_y \quad \left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right) \end{aligned}$$

Esercizio 2

Sia dato un filo indefinito in direzione $+z$ in cui scorre la corrente $I = 1$ A (geometria di sinistra). Calcolare la forza agente su una carica $Q = 10^{-3}$ C che si trova nel punto A, a distanza $d_1 = 5$ cm dal filo, e che si muove con velocità $\vec{v} = -2\vec{a}_x$ m/s.

Si consideri ora una lastra metallica sottile (in direzione y) e indefinita in direzione z su cui scorre una densità di corrente superficiale $\vec{J} = 0.5\vec{a}_z$ A/m (larghezza della lastra $K = 3$ cm). Si calcoli anche per questo caso la forza agente sulla stessa carica Q che si trova nel punto A.

Suggerimento: si utilizzi il principio di sovrapposizione degli effetti.



Traccia di soluzione:

A) Il vettore densità di flusso magnetico generato dal filo indefinito vale:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d_1} \vec{a}_y = 4\vec{a}_y \text{ } \mu\text{T}$$

Dunque la forza di Lorentz vale:

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B} = -Q|\vec{v}||\vec{B}|\vec{a}_z = -8 \cdot 10^{-9} \vec{a}_z \text{ N}$$

Per quanto riguarda la lastra, il procedimento è simile. E' dunque necessario dapprima calcolare il vettore densità di flusso magnetico in A dovuto a tutta la lastra, che può essere vista come una composizione di fili di dimensione infinitesima in direzione x . Il contributo al vettore densità di flusso magnetico di un filo infinitesimo a distanza x dal lato sinistro della lastra (si ponga $x = 0$ su tale lato) vale:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dI}{2\pi(d_1 - x)} \vec{a}_y = \frac{\mu_0 |\vec{J}| dx}{2\pi(d_1 - x)} \vec{a}_y$$

Per ottenere il vettore densità di flusso magnetico totale, si integra su tutta la lastra:

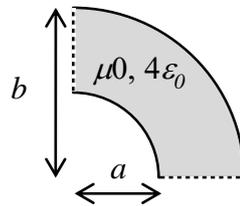
$$\begin{aligned} \vec{B} &= \int_0^K \frac{\mu_0 |\vec{J}| dx}{2\pi(d_1 - x)} \vec{a}_y = \frac{\mu_0 |\vec{J}|}{2\pi} \vec{a}_y \int_0^K \frac{dx}{(d_1 - x)} = \frac{\mu_0 |\vec{J}|}{2\pi} \vec{a}_y [-\log(d_1 - x)]_0^K \\ &= \frac{\mu_0 |\vec{J}|}{2\pi} \vec{a}_y [\log(d_1) - \log(d_1 - K)] = 9.2 \cdot 10^{-8} \text{ T} \end{aligned}$$

In questo caso la forza di Lorentz vale:

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B} = -Q|\vec{v}||B|\vec{a}_z = -1.84 \cdot 10^{-10} \vec{a}_z \text{ N}$$

Esercizio 3

Data il quarto di cavo coassiale in figura ($\mu = \mu_0$, $\varepsilon = 4\varepsilon_0$ ovunque, $a = 0.5$ cm, $b = 0.8$ cm), si calcoli, alla frequenza $f=200$ MHz, la perdita (dovuta ai conduttori con conducibilità finita $\sigma_c = 5 \cdot 10^7$ S/m) espressa in dB in 20 m di cavo. Si calcoli anche la velocità di propagazione.
Suggerimento: si trascuri l'effetto delle perdite nel calcolo dell'impedenza caratteristica



Traccia di soluzione:

$$\alpha = \frac{r}{2Z_c}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{l}{c}} = \frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r}}{c}$$

La capacità per unità di lunghezza del quarto di coassiale è pari a

$$c = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{4\log(b/a)} = 1.18 \cdot 10^{-10} \left(\frac{\text{F}}{\text{m}}\right)$$

$$Z_c = 56.4 \Omega$$

$$r = \frac{4}{\sigma_c \delta 2\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 0.82 \frac{\Omega}{\text{m}}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_c}} = 5 \mu\text{m}$$

$$\alpha = \frac{r}{2Z_c} = 0.0073 \frac{\text{Np}}{\text{m}} = 0.063 \frac{\text{dB}}{\text{m}}$$

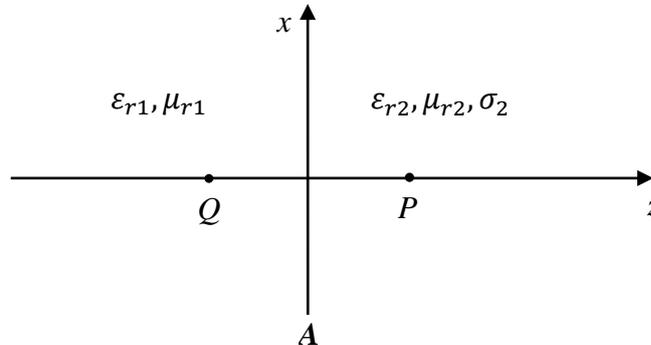
In 20 m la perdita è di 1.26 dB.

La velocità di propagazione è pari a:

$$v = \sqrt{\frac{1}{lc}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r}} \approx 1.5 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Esercizio 4

Un'onda piana uniforme (frequenza di 200 MHz) si propaga in un materiale dielettrico ($\epsilon_{r1} = 4, \mu_{r1} = 1$) e il campo elettrico nell'origine vale a $\vec{E}_i(0,0,0) = -j\vec{a}_x$ V/m. L'onda incide su un altro materiale dielettrico ($\epsilon_{r2} = 4, \mu_{r2} = 1, \sigma_2 = 4.5 \cdot 10^{-2}$ S/m), calcolare il fasore campo elettrico totale nei punti $P(0,0,\lambda_2)$ e $Q(0,0,-\lambda_1)$.



Traccia di soluzione:

Innanzitutto è necessario calcolare l'impedenza intrinseca dei due mezzi. Per il materiale di sinistra si ha:

$$\eta_1 = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_{r1}}{\epsilon_{r1}}} = 188.5 \Omega$$

Per il secondo strato bisogna tenere conto del fatto che è un mezzo con perdite. Calcolando la tangente di δ si ottiene $\sigma/\omega\epsilon \approx 1$. Non è possibile dunque passare attraverso approssimazioni. Si ottiene l'impedenza intrinseca del mezzo come:

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma + j\omega\epsilon_2}} = 146 + j61 \Omega$$

Si può dunque calcolare il coefficiente di riflessione all'interfaccia:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -0.092 + j0.199$$

Per calcolare le coordinate dei punti Q e P in metri, è necessario calcolare la lunghezza d'onda nei due mezzi. Per il mezzo 1, senza perdite, si ha semplicemente:

$$\lambda_1 = \frac{c}{f\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}} = 0.75 \text{ m}$$

Per il secondo mezzo, essendo con perdite, è necessario passare attraverso il calcolo della costante di propagazione:

$$\gamma_2 = \alpha_2 + j\beta_2 = \sqrt{(j\omega\mu_2)(\sigma + j\omega\epsilon_2)} = 3.9 + j9.2 \text{ 1/m}$$

La lunghezza d'onda si ricava da β_2 come:

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{\beta_2} = 0.68 \text{ m}$$

Dunque il campo elettrico nell'origine, somma del campo incidente e riflesso, vale:

$$\vec{E}_1(0,0,0) = \vec{E}_i(0,0,0)(1 + \Gamma) = (0.199 - j0.908) \vec{\mu}_x \text{ V/m}$$

Il campo nel punto P vale dunque:

$$\vec{E}_2(P) = \vec{E}_1(0,0,0)e^{-\gamma_2\lambda_2} = (0.014 - j0.066)\vec{\mu}_x \text{ V/m}$$

Il campo nel punto Q sarà somma del campo incidente e di quello riflesso:

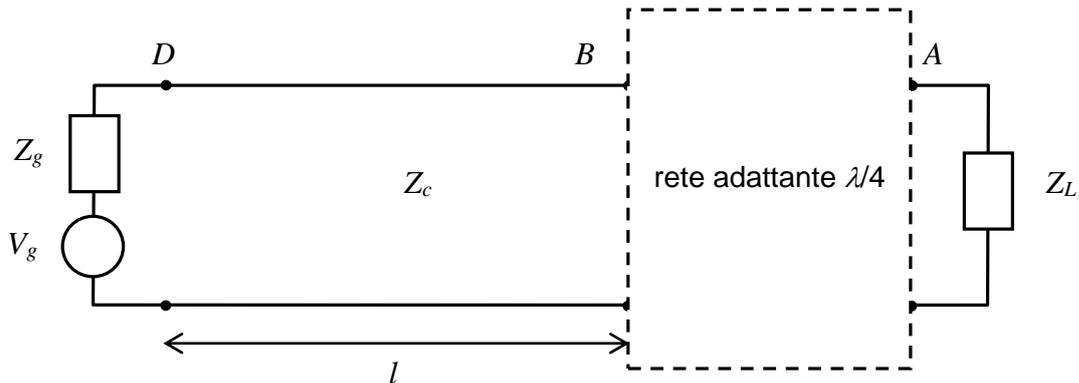
$$\begin{aligned}\vec{E}_1(0,0,-\lambda_1) &= \vec{E}_i(0,0,-\lambda_1) + \vec{E}_r(0,0,-\lambda_1) = \vec{E}_i(0,0,0)e^{-j\beta_1(-\lambda_1)} + \vec{E}_i(0,0,0)\Gamma e^{+j\beta_1(-\lambda_1)} = \\ &= (0.199 - j0.908)\vec{\mu}_x\end{aligned}$$

Ovviamente il valore di campo totale nel punto Q coincide con quello che si ha nell'origine (somma di onda incidente più riflessa), essendo il punto Q a distanza λ_1 dall'interfaccia.

Esercizio 5

Sia dato un generatore avente frequenza di 300 MHz, impedenza interna $Z_g = 50 \Omega$ e tensione a vuoto $V_g = 50V$, collegato ad un carico $Z_L = 120 - j40 \Omega$ attraverso una linea di trasmissione senza perdite ($\epsilon_r=4$), avente impedenza caratteristica $Z_c=50 \Omega$, e lunghezza $l = 0.5$ m (vedi figura in assenza di rete adattante).

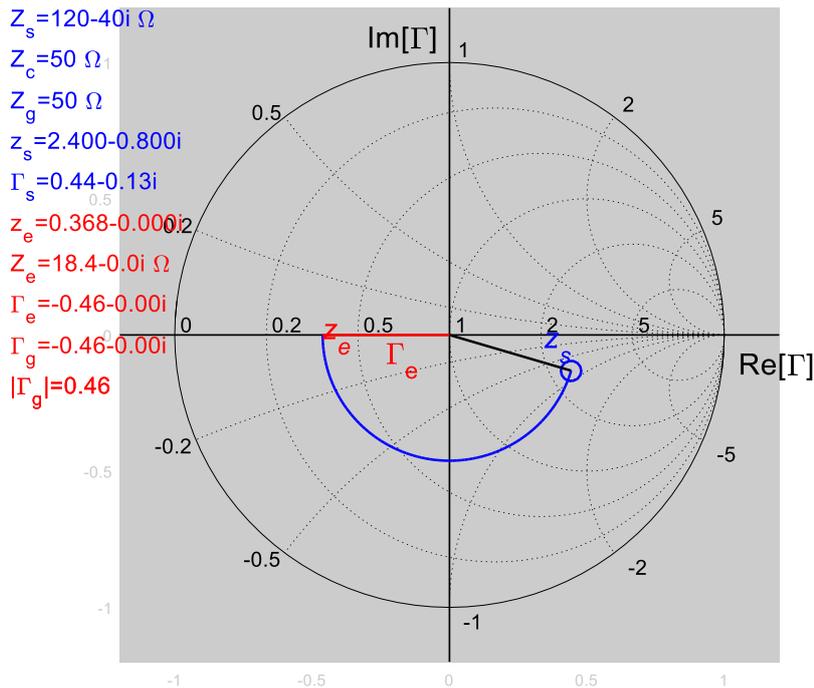
1. Si progetti un trasformatore $\lambda/4$ con neutralizzatore fra le sezioni A e B in modo da adattare il carico alla linea (specificare le caratteristiche delle linee di trasmissione utilizzate).
2. Si calcoli la potenza dissipata sul carico con e senza la rete adattante.



Traccia di soluzione:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{v_0}{f\sqrt{\epsilon_r}} = 0.5 \text{ m}$$

Con un neutralizzatore con $Z_c=50 \Omega$ e di lunghezza pari a 11.35 cm si ottiene un carico puramente reale pari a 18.4Ω :



L'impedenza caratteristica del trasformatore $\lambda/4$ è quindi:

$$Z_x = \sqrt{18.4 \cdot 50} = 30.33 \Omega$$

Con la rete adattante:

$$P_L = P_d = \frac{|V_g|^2}{8Z_g} = 6.25 \text{ W}$$

Senza rete adattante:

$$P_L = P_d (1 - |\Gamma_g|^2)$$

con:

$$\Gamma_g = \frac{Z_D - Z_g}{Z_D + Z_g}$$

Essendo $l = \lambda$, si ha:

$$Z_D = Z_L = 120 - j40 \Omega$$

e quindi:

$$\Gamma_g = \frac{Z_D - Z_g}{Z_D + Z_g} = 0.443 - j0.131$$

In ogni caso, essendo $Z_g = Z_c$:

$$|\Gamma_g| = |\Gamma_L| = 0.4616$$

$$P_L = P_d (1 - |\Gamma_g|^2) = 4.92 \text{ W}$$