

Campi Elettromagnetici – Proff. C. Capsoni e C. Riva
Appello del 8 luglio 2008

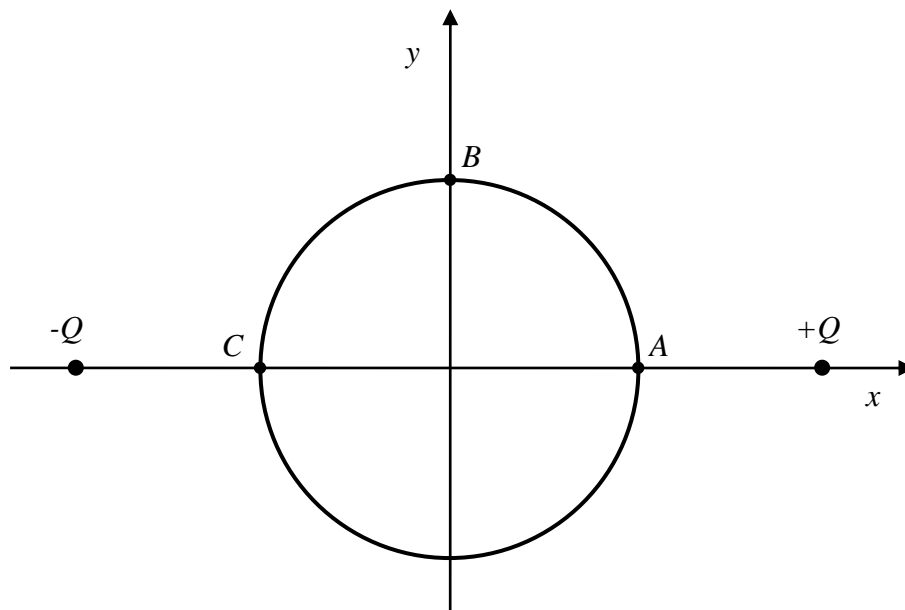
1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME _____

MATRICOLA _____

Esercizio 1



Ad una sfera conduttrice isolata (di raggio $R=0.2$ m) ed elettricamente neutra (carica totale nulla), vengono avvicinate due cariche $+Q$ e $-Q$ ($Q = 4\pi \cdot 10^{-9}$ C) nei punti di coordinate $(0.4,0)$ e $(-0.4,0)$ rispettivamente (vedi figura). Calcolare:

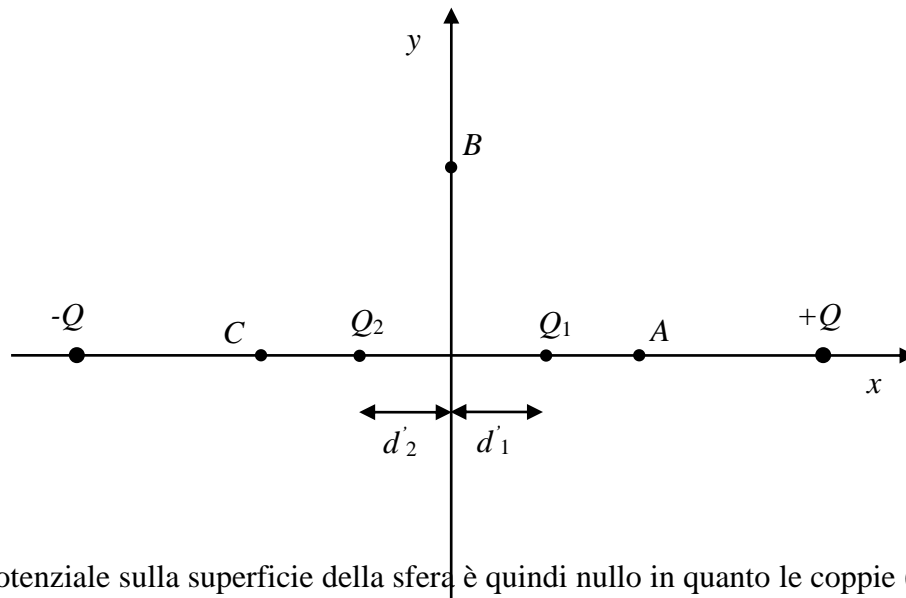
- il valore del potenziale elettrico (assumendo che sia nullo il potenziale all'infinito) nei punti $A(0.2,0)$, $B(0,0.2)$, e $C(-0.2,0)$;
- la totale carica indotta sulla sfera.

Suggerimento: si sfruttino i risultati già ottenuti con il metodo delle cariche immagine.

Soluzione:

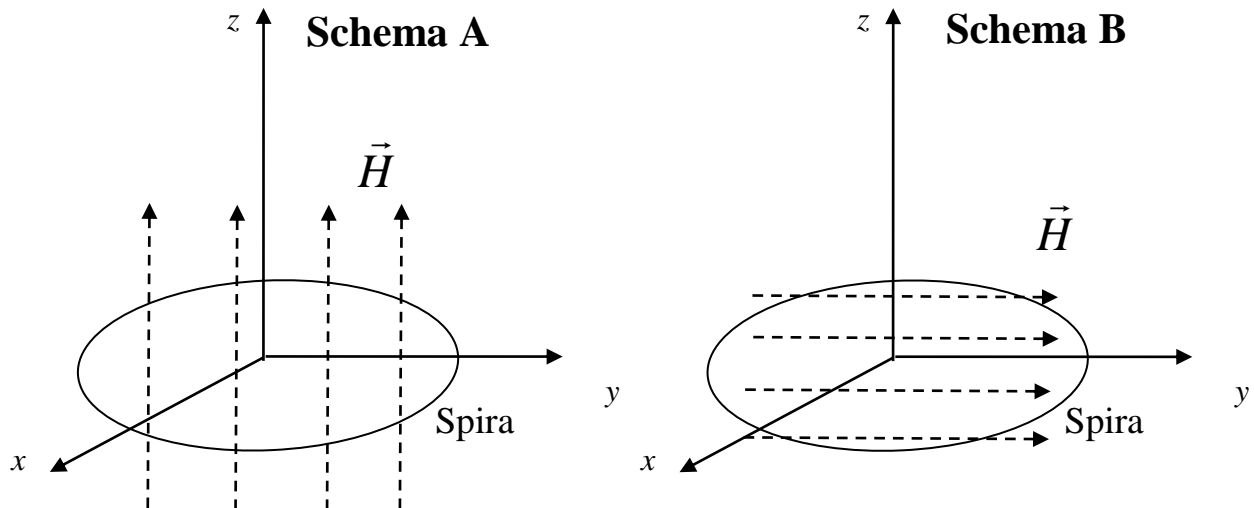
Poiché la sfera conduttrice è elettricamente neutra e isolata, la totale carica indotta su di essa è nulla. Inoltre il potenziale sulla superficie esterna deve essere costante (quindi il potenziale dei punti A, B e C è lo stesso).

Applicando il metodo delle cariche immagine, $+Q$ induce sulla sfera una carica il cui effetto può essere rappresentato da una carica immagine $Q_1 = -QR/d = -Q/2 = -2\pi \cdot 10^{-9}$ C posta sul semiasse $+x$ a distanza $d'_1 = R^2/d = 0.1$ m dall'origine degli assi. Analogamente, $-Q$ induce una carica $Q_2 = -(-QR/d) = Q/2 = 2\pi \cdot 10^{-9}$ C posta sul semiasse $-x$ a distanza $d'_2 = R^2/d = 0.1$ m dall'origine degli assi. Non è necessario introdurre alcuna altra carica nel centro della sfera in quanto la carica indotta sulla sfera nulla. La sfera è quindi sostituita dalle cariche immagini poste come nella seguente figura:



Il valore del potenziale sulla superficie della sfera è quindi nullo in quanto le coppie $(+Q, Q_1)$ e $(-Q, Q_2)$ generano un potenziale nullo su di essa.

Esercizio 2



Una spira metallica circolare di raggio $r = 10$ cm è posta sul piano xy (il suo centro coincide con l'origine degli assi) ed è immersa in un campo magnetico uniforme in tutto lo spazio. Determinare:

- 1) il modulo della tensione sulla spira nel caso in cui il campo sia $\vec{H} = 3\vec{\mu}_z$ A/m (schema A);
- 2) il modulo della tensione sulla spira nel caso in cui il campo sia $\vec{H} = 3\cos(2\pi 10^3 t)\vec{\mu}_z$ A/m (schema A);
- 3) il modulo della tensione sulla spira nel caso in cui il campo sia $\vec{H} = 3\cos(2\pi 10^3 t)\vec{\mu}_y$ A/m (schema B).

Soluzione:

Perché si induca una tensione sulla spira, è necessaria una variazione nel tempo del flusso magnetico attraverso la spira metallica. Per lo schema A, il campo magnetico e la normale alla spira sono tra loro paralleli; in questo caso il flusso vale (S indica la superficie della spira):

$$\phi(\vec{B}) = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 H \int_S dS = \mu_0 H r^2 \pi \quad \text{Wb}$$

Il modulo della tensione indotta sulla spira vale:

$$|V| = \left| -\frac{\partial \phi(\vec{B})}{\partial t} \right| = \frac{\partial(\mu_0 H r^2 \pi)}{\partial t} = \mu_0 r^2 \pi \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{V}$$

Quindi per il caso 1 si ottiene:

$$\phi(\vec{B}) = \mu_0 H r^2 \pi = 1,18 \cdot 10^{-7} \quad \text{Wb}$$

da cui: $|V| = 0$ V, dato che il flusso non dipende in questo caso dal tempo.

Per il caso 2 si ottiene invece:

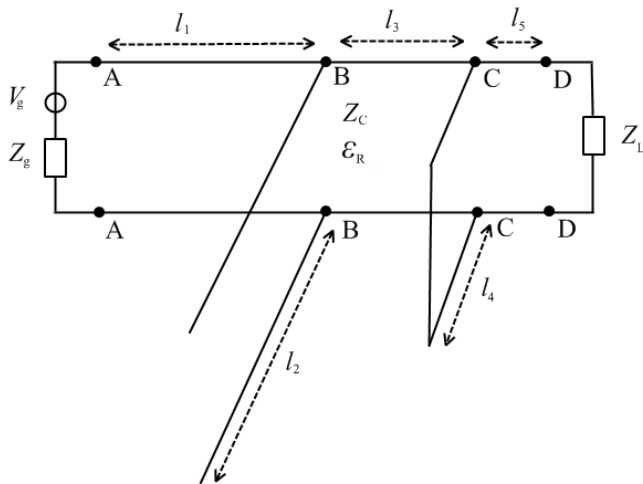
$$\phi(\vec{B}) = \mu_0 H r^2 \pi = 1,18 \cdot 10^{-7} \cos(2\pi 10^3 t) \quad \text{Wb}$$

da cui: $|V| = 1,18 \cdot 10^{-7} (2\pi 10^3) \sin(2\pi 10^3 t) = 7,4 \cdot 10^{-4} \sin(2\pi 10^3 t) \quad \text{V}$

Per lo schema B, la normale alla spira e il campo magnetico sono perpendicolari, il che rende nullo il flusso $\phi(\vec{B})$. Per il caso 3 dunque: $|V| = 0$ V.

Esercizio 3

Sia dato il circuito in figura, operante ad una frequenza di 100 MHz. Si determini la potenza dissipata sul carico Z_L .



$$\begin{aligned} Z_g &= 150 \, \Omega \\ Z_c &= 50 \, \Omega \\ Z_L &= 50 + j 100 \, \Omega \\ V_g &= 20 \, \text{V} \\ \epsilon_r &= 9 \\ l_1 &= 3,8 \, \text{m} \\ l_2 &= 1,375 \, \text{m} \\ l_3 &= 0,5 \, \text{m} \\ l_4 &= 0,125 \, \text{m} \\ l_5 &= 0,25 \, \text{m} \end{aligned}$$

Soluzione:

Per conoscere la potenza dissipata sul carico, è necessario riportare il carico stesso alla sezione AA. La lunghezza d'onda vale $\lambda = c / (f \sqrt{\epsilon_r}) = 1 \, \text{m}$. Le lunghezze normalizzate alla lunghezza d'onda valgono $\bar{l}_1 = l_1 / \lambda = 3,8 = 3,5 + 0,3$, $\bar{l}_2 = l_2 / \lambda = 1,375 = 1 + 0,375$, $\bar{l}_3 = l_3 / \lambda = 0,5 = 1/2$, $\bar{l}_4 = l_4 / \lambda = 0,125 = 1/8$, $\bar{l}_5 = l_5 / \lambda = 0,25 = 1/4$. Dato che \bar{l}_5 è un tratto $\lambda/4$, il carico Z_L riportato alla sezione CC vale $Z_{CC1} = Z_c^2 / Z_L = 10 - j20 \, \Omega$. Il C.C. riportato alla sezione CC vale $Z_{CC2} = j50 \, \Omega$. Sommando le ammettenze in parallelo alla sezione CC si ottiene: $Y_{CC} = 1/Z_{CC1} + 1/Z_{CC2} = 0,02 + j0,02 \, \text{S}$, ossia $Z_{CC} = 1/Y_{CC} = 25 - j25 \, \Omega$. Dato che \bar{l}_3 è un tratto $\lambda/2$ (giro completo sulla carta di Smith), il carico Z_{CC} riportato alla sezione BB vale $Z_{BB1} = Z_{CC} = 25 - j25 \, \Omega$. Il C.A. portato alla sezione BB vale $Z_{BB2} = j50 \, \Omega$. Sommando le ammettenze in parallelo alla sezione BB si ottiene: $Y_{BB} = 1/Z_{BB1} + 1/Z_{BB2} = 0,02 \, \text{S}$, ossia $Z_{BB} = 1/Y_{BB} = 50 \, \Omega$. Dato che il carico alla sezione BB è uguale all'impedenza caratteristica della linea (centro della carta di Smith), il carico Z_{BB} riportato alla sezione AA vale $Z_{AA} = Z_{BB} = 50 \, \Omega$.

E' possibile a questo punto calcolare il coefficiente di riflessione alla sezione del generatore AA:

$$\Gamma_g = \frac{Z_{AA} - Z_g}{Z_{AA} + Z_g} = \frac{50 - 150}{50 + 150} = -0,5$$

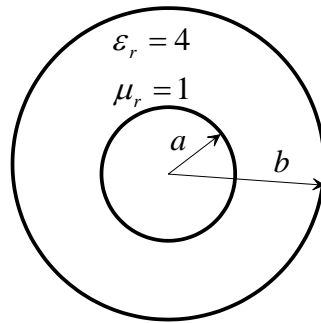
La potenza che passa la sezione AA vale:

$$P_{AA} = P_d (1 - |\Gamma_g|^2) = \frac{|V_g|^2}{8 \text{Re}(Z_g)} (1 - |\Gamma_g|^2) = 0,25 \, \text{W}$$

Tale potenza è anche quella assorbita dalla parte reale del carico Z_L , dato che la linea non presenta perdite.

Esercizio 4

Data la linea coassiale in figura ($\epsilon_r=4$, $\mu_r=1$, $b = 3 \text{ mm}$, $Z_c=50 \text{ }\Omega$), si calcoli l'attenuazione espressa in dB/km dovuta alle perdite nei conduttori ($\sigma=5 \cdot 10^7 \text{ S/m}$) alla frequenza di 500 MHz;



Soluzione:

L'attenuazione dovuta alla conducibilità finita dei conduttori vale:

$$\alpha = \frac{r}{2Z_c} \text{ Np/m}$$

dove r è la resistenza per unità di lunghezza e Z_c è l'impedenza caratteristica della linea. Per una linea coassiale, la capacità per unità di lunghezza vale:

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \text{ F/m}$$

mentre l'induttanza L può essere ricavata dalla relazione $LC = \epsilon\mu$. L'impedenza caratteristica della linea vale dunque:

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{L}{C} \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C}}} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{2\pi\epsilon} \ln(b/a) \text{ }\Omega$$

Da questa relazione si può ricavare il valore di a :

$$\ln(b/a) = \frac{Z_c 2\pi\epsilon}{\sqrt{\epsilon\mu}} = 1,6678 \quad \Rightarrow \quad b/a = e^{1,6678} = 5,3 \quad \Rightarrow \quad a = b/5,3 = 0,566 \text{ mm}$$

La resistenza per unità di lunghezza vale:

$$r = \frac{1}{\sigma\delta p} \text{ }\Omega/\text{m}$$

dove lo spessore di penetrazione δ vale:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = 3,18 \text{ }\mu\text{m}$$

mentre p è la misura del perimetro della sezione del conduttore. Nel caso del coassiale quindi r vale:

$$r = \frac{1}{\sigma\delta 2\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 2,1 \text{ }\Omega/\text{m}$$

L'attenuazione vale dunque:

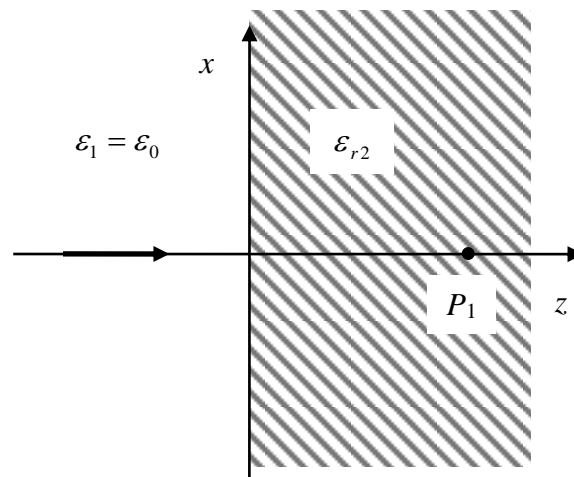
$$\alpha = \frac{r}{2Z_c} = 0,021 \text{ Np/m} = 21 \text{ Np/km} = 21 \cdot 8,686 \text{ dB/km} = 182,4 \text{ dB/km}$$

Esercizio 5

Un'onda piana uniforme alla frequenza di 200 MHz si propaga nel vuoto e ha associata una densità di potenza pari a 0.7 W/m^2 . Essa incide perpendicolarmente su un semispazio dielettrico (privo di perdite). A 5 metri dalla superficie di separazione tra i due dielettrici, nel secondo semispazio (punto P_1 in figura) il modulo del campo elettrico vale 17.8 V/m .

Sapendo che il campo elettrico incidente è diretto lungo l'asse y (uscente dal piano del foglio) e il suo fasore è reale nell'origine, si calcoli:

- il valore di ϵ_{r2}
- l'espressione del campo elettrico e magnetico totale (modulo e fase) in P_1
- l'espressione del campo elettrico e magnetico totale (modulo e fase) in P_2 , a 5 metri dalla superficie di separazione tra i due dielettrici, nel primo semispazio



Soluzione:

Il coefficiente di trasmissione vale:

$$T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2\eta_0 / \sqrt{\epsilon_{r2}}}{\eta_0 / \sqrt{\epsilon_{r2}} + \eta_0} = \frac{2}{1 + \sqrt{\epsilon_{r2}}} \quad \text{da cui} \quad \sqrt{\epsilon_{r2}} = \frac{2-T}{T}$$

Il modulo del campo incidente sulla discontinuità si può ricavare dalle densità di potenza incidente:

$$P_1^i = \frac{1}{2} \frac{|\vec{E}_1^i|}{\eta_1} \quad \text{da cui} \quad |\vec{E}_1^i| = \sqrt{2\eta_1 P_1^i} = 22,97 \text{ V/m} \quad \text{e nell'origine degli assi: } \vec{E}_1^i(0) = 22,97 \vec{\mu}_y$$

Il modulo del campo trasmesso nel P_1 in assenza di perdite vale:

$$|\vec{E}_2^t| = |\vec{E}_1^i| |T|, \text{ da cui } |T| = \frac{|\vec{E}_2^t|}{|\vec{E}_1^i|} = 0,7749, \quad \text{da cui } T = 0,7749 \quad (\text{unica soluzione fisica}) \quad \text{e}$$

$$\Gamma = T - 1 = -0,2251.$$

Si ottiene dunque:

$$\sqrt{\epsilon_{r2}} = 1,5809, \text{ da cui } \epsilon_{r2} = 2,5.$$

Il campo elettrico totale nel punto P_1 vale (solo campo progressivo):

$$\vec{E}_2^t(z) = \vec{E}_2^t(0) e^{-j\beta_2 z} = \vec{E}_1^i(0) T e^{-j\beta_2 z} \text{ V/m}$$

Per il secondo mezzo si ottiene: $\beta_2 = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} = 6,63 \text{ rad/m}$ con $z = 5 \text{ m}$. Si ottiene dunque:

$$\vec{E}_2^t(z=5) = (-2,7 - j17,6) \vec{\mu}_y \text{ V/m}$$

Il campo magnetico nel punto P₁ vale (dividendo per η_2 e tenendo conto che la direzione del campo magnetico è $-\vec{\mu}_x$ poiché l'onda si propaga in direzione z):

$$\vec{H}_2^i(z=5) = -(-0.011 - j0.074)\vec{\mu}_x \text{ A/m}$$

Per quanto riguarda il punto P₂, si considera il coefficiente di riflessione Γ . L'espressione del campo elettrico totale in P₂ è ($\beta_1 = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1} = \beta_0 = 4,2 \text{ rad/m}$, con $z = -5 \text{ m}$):

$$\vec{E}_1(z=-5) = \vec{E}_1^i + \vec{E}_1^r = \vec{E}_1^i(0)e^{-j\beta_1 z} + \Gamma\vec{E}_1^i(0)e^{j\beta_1 z} = (-9.12 + j24.17)\vec{\mu}_y \text{ V/m}$$

Per il campo magnetico totale in P₂ si ha (dividendo questa volta per $\eta_1 = \eta_0$):

$$\vec{H}_1(z=-5) = -\frac{E_1^i}{\eta_1}\vec{\mu}_x + \frac{E_1^r}{\eta_1}\vec{\mu}_x = (0.038 - j0.041)\vec{\mu}_x \text{ A/m}$$