Campi Elettromagnetici – Proff. C. Capsoni e C. Riva
Appello del 9 febbraio 2009

1	2	3	4	5

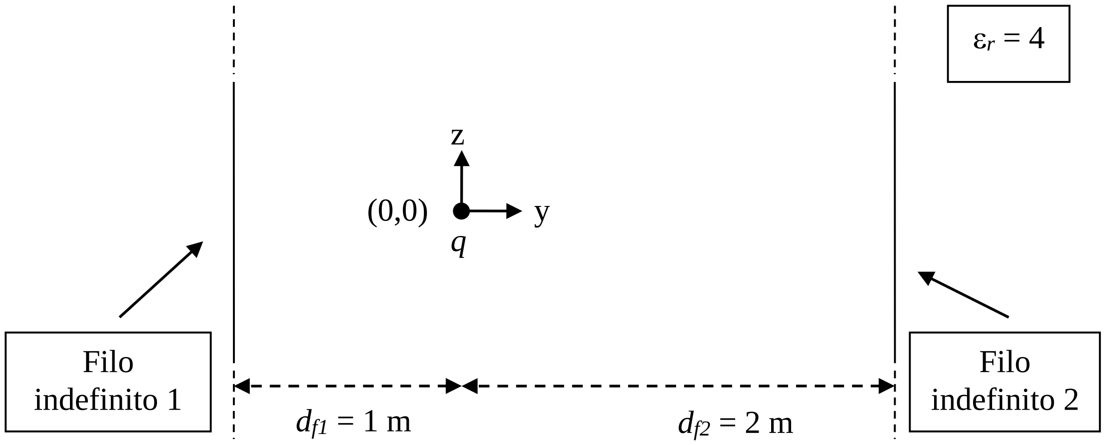
non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME ______________________________

MATRICOLA ______________________________

FIRMA ______________________________

Esercizio 1



In un mezzo dielettrico con costante dielettrica relativa $\varepsilon_{r1} = 4$ si trovano, secondo la geometria in figura:

- 2 fili indefiniti in direzione z su cui è depositata una densità di carica lineare uniforme, rispettivamente $\sigma_{l1} = 10^{-9}$ C/m (filo 1) e $\sigma_{l2} = -10^{-9}$ C/m (filo 2);
- una carica $q = 10^{-12}$ C nell'origine degli assi.

Calcolare la posizione in cui porre una carica $Q = 10^{-9}$ C in modo che la carica q rimanga in equilibrio.

Soluzione:

Il campo dovuto al filo indefinito 1 vale:

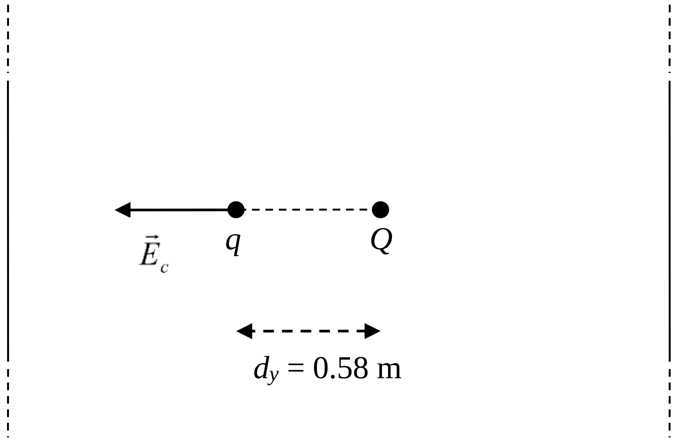
$$\vec{E}_{f1} = \frac{\sigma_{l1}}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 d_{f1}}\vec{u}_y = 4.5 \text{ V/m}$$

Il campo dovuto al filo indefinito 2 vale:

$$\vec{E}_{f2} = \frac{\sigma_{l2}}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 d_{f2}}\vec{u}_y = 2.25 \text{ V/m}$$

Perché q sia in equilibrio, il campo generato dalla carica Q, $\vec{E}_c$,deve essere uguale in modulo e contrario in verso a quello generato dai due fili. La carica Q sarà quindi posta sull'asse y (z = 0), in posizione d_y, a destra della carica q. Deve essere quindi:

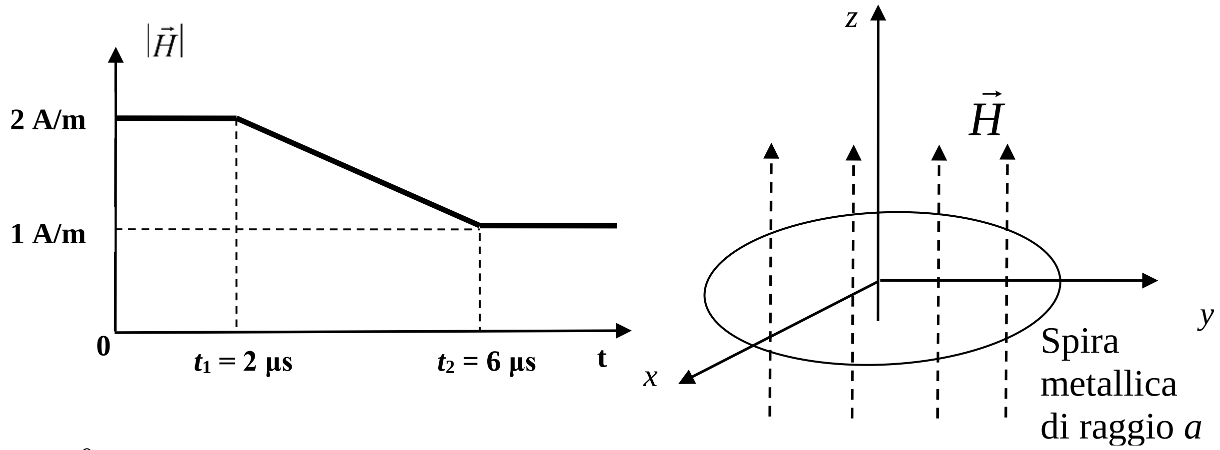
$$\left|\vec{E}_c\right| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 d_y^2} = \left|\vec{E}_{f1} + \vec{E}_{f2}\right| \quad \Rightarrow \quad d_y = \sqrt{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0\left|\vec{E}_{f1} + \vec{E}_{f2}\right|}} = 0.58 \text{ m}$$



Esercizio 2

Una spira metallica circolare di raggio a = 1 m è immersa in un campo magnetico uniforme nello spazio in modo che la normale alla superficie della spira sia parallela alle linee di flusso del vettore $\vec{H}$ (parte destra in figura), il cui modulo varia nel tempo secondo la seguente legge (parte sinistra della figura):

$$\left|\vec{H}\right| = \begin{cases} 2 \text{ A/m} & 0 \le t < 2\ \mu\text{s} \\ 2{,}5 - 0{,}25t \text{ A/m} & 2\ \mu\text{s} \le t < 6\ \mu\text{s} \\ 1 \text{ A/m} & t \ge 6\ \mu\text{s} \end{cases}$$



Per $t \ge 0$:
1) calcolare il flusso magnetico attraverso la spira;
2) calcolare il modulo della forza elettromotrice (f.e.m.) indotta sulla spira;
3) calcolare l'intensità della corrente indotta nella spira se ad essa è associata una resistenza R = 50 Ω;
4) calcolare l'intensità della corrente indotta nella spira per $t \ge 6$ μs se la spira ruota rispetto all'asse z.

Soluzione:

1) Il flusso magnetico attraverso la spira, dove il campo magnetico e la normale alla spira sono tra loro paralleli, vale (S indica la superficie della spira):

$$\phi\left(\vec{B}\right) = \int_S \vec{B}\, d\vec{S} = \mu_0 \left|\vec{H}\right| \int_S dS = \mu_0 \left|\vec{H}\right| a^2 \pi = \begin{cases} 7.9 \times 10^{-6}\ Wb & 0 \le t < 2\ \mu\text{s} \\ 9.9 \times 10^{-6} - 9.9 \times 10^{-7} t\ \ Wb & 2\ \mu\text{s} \le t < 6\ \mu\text{s} \\ 7.9 \times 10^{-6}\ Wb & t \ge 6\ \mu\text{s} \end{cases}$$

2) Il modulo della tensione indotta sulla spira vale:

$$|V| = \left| -\frac{\partial \phi\left(\vec{B}\right)}{\partial t} \right| = \frac{\partial\left(\mu_0 \left|\vec{H}\right| a^2 \pi\right)}{\partial t} = \mu_0 a^2 \pi \frac{\partial \left|\vec{H}\right|}{\partial t} = \begin{cases} 0\ V & 0 \le t < 2\ \mu\text{s} \\ 9.9 \times 10^{-7}\ V & 2\ \mu\text{s} \le t < 6\ \mu\text{s} \quad \text{V} \\ 0\ V & t \ge 6\ \mu\text{s} \end{cases}$$

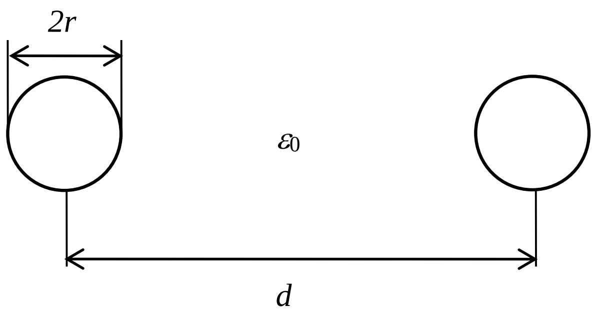
3) L'intensità della corrente indotta nella spira, per la legge di Ohm, vale:

$$I = \frac{V}{R} = \begin{cases} 0\ A & 0 \le t < 2\ \mu\text{s} \\ 2 \times 10^{-8}\ A & 2\ \mu\text{s} \le t < 6\ \mu\text{s} \\ 0\ A & t \ge 6\ \mu\text{s} \end{cases}$$

4) Dato che la rotazione della spira intorno all'asse z non genera variazione di flusso magnetico nel tempo, la corrente indotta nella spira per $t \ge 6$ μs è nulla.

Esercizio 3

Calcolare il <u>raggio</u>, *r*, dei conduttori, assunti uguali, della linea in aria di figura in modo che l'impedenza caratteristica Z_c sia pari a 300 Ω, sapendo che d=3 cm. Calcolare, per tale linea, la costante di attenuazione <u>in dB/km</u> alla frequenza di 100 MHz (conduttanza dei conduttori $\sigma = 5 \cdot 10^7 \ \mathrm{S/m}$).
Suggerimento: si utilizzi l'approssimazione dei conduttori sottili.



Soluzione:

Calcolo di r:

$$Z_C = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\ln(d/r)}{\pi} = 300 \ \Omega$$

$$d/r = \exp\left(\frac{300\pi}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}} \right) = 12.18$$

$$r = d/1.87 = 0.25 \ \mathrm{cm}$$

Calcolo della costante di attenuazione:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = 7.12 \ \mu\mathrm{m}$$

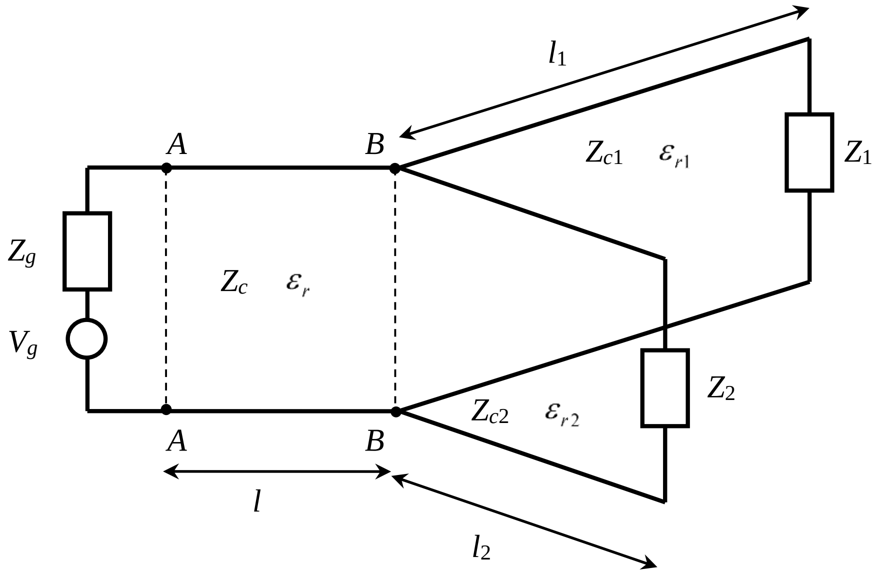
$$R = \frac{2}{2\pi r\sigma\delta} = 0.36$$

$$\alpha = \frac{R}{2Z_C} = 6.05 \times 10^{-4} \ \mathrm{Np/m} = \ 5.2 \ \mathrm{dB/km}$$

Esercizio 4

Data la linea di trasmissione in figura operante alla frequenza di 300 MHz, calcolare:

a. la potenza erogata dal generatore ai 2 carichi separatamente;
b. il modulo della tensione a morsetti dei carichi Z_1 e Z_2;
c. la tensione in modulo e fase sulla sezione *BB*.



V_g = 100 [V]
Z_g = 50 [Ω]
f = 300 MHz
Z_1 = 100 [Ω]
Z_2 = 50 [Ω]
l = 4 [m]
l_1 = 20 [cm]
l_2 = 20 [cm]
ε_r = 1
ε_{r1} = 1
ε_{r2} = 2
Z_c = 50 [Ω]
Z_{c1} = 50 [Ω]
Z_{c2} = 75 [Ω]

Soluzione:

Le lunghezze d'onda nei tre tratti di linea con diverse caratteristiche valgono:

$$\lambda_0 = c/f = 1 \text{ m} \qquad \lambda_1 = \lambda_0 \big/ \sqrt{\varepsilon_{r1}} = 1 \text{ m} \qquad \lambda_2 = \lambda_0 \big/ \sqrt{\varepsilon_{r2}} = 0.707 \text{ m}$$

Dunque le lunghezze normalizzate delle linee valgono:

$$\bar{l} = l/\lambda = 4 \qquad \bar{l}_1 = l_1/\lambda_1 = 0.2 \qquad \bar{l}_2 = l_2/\lambda_2 = 0.283$$

Le impedenze normalizzate invece valgono:

$$\bar{Z}_1 = Z_1/Z_{c1} = 2 \qquad \bar{Z}_2 = Z_2/Z_{c2} = 0.667$$

Utilizzando la carta di Smith, si riportano le impedenze normalizzate alla sezione BB:

$$\bar{Z}_{1BB} = 0.54 - j0.24 \quad \Rightarrow \quad Z_{1BB} = \bar{Z}_{1BB} Z_{c1} = 26.9 - j11.9 \ \Omega$$

$$\bar{Z}_{2BB} = 1.43 - j0.24 \quad \Rightarrow \quad Z_{2BB} = \bar{Z}_{2BB} Z_{c2} = 106.9 - j17.9 \ \Omega$$

Il carico totale alla sezione BB vale (parallelo):

$$Y_{BB} = Y_{1BB} + Y_{2BB} = \frac{1}{Z_{1BB}} + \frac{1}{Z_{2BB}} = 0.04 + j0.015 \text{ S} \quad \Rightarrow \quad Z_{BB} = 1/Y_{BB} = 21.8 - j8.2 \ \Omega$$

L'impedenza alla sezione AA coincide con quella alla sezione BB perché ci si muove sulla carta di Smith compiendo 8 giri completi ($\bar{l} = 4$): $Z_{AA} = Z_{BB} = 21.8 - j8.2\,\Omega$

Il coefficiente di riflessione alla sezione del generatore vale:

$$\Gamma_g = \frac{Z_{AA} - Z_g}{Z_{AA} + Z_g} = -0.38 - j0.16 \quad \Rightarrow \quad \left|\Gamma_g\right| = 0.41$$

La potenza che passa alla sezione AA e giunge quindi alla sezione BB, dove viene assorbita dai carichi, vale:

$$P_{AA} = P_{BB} = P_d\left(1 - \left|\Gamma_g\right|^2\right) = \frac{\left|V_g\right|^2}{8\,\mathrm{Re}\left[Z_g\right]}\left(1 - \left|\Gamma_g\right|^2\right) = 20.8 \text{ W}$$

La potenza si ridistribuisce sui carichi proporzionalmente alla parte reale dell'ammettenza dei carichi stessi alla sezione BB:

$$P_1 = P_{BB}\frac{\mathrm{Re}\left[Y_{1BB}\right]}{\mathrm{Re}\left[Y_{1BB}\right] + \mathrm{Re}\left[Y_{2BB}\right]} = 16.1 \text{ W} \quad \Rightarrow \quad P_2 = P_{BB} - P_1 = 4.7 \text{ W}$$

Il modulo della tensione ai morsetti dei carichi vale:

$$\left|V_1\right| = \sqrt{\frac{2P_1}{\mathrm{Re}\left[Y_1\right]}} = 56.8 \text{ V} \qquad \left|V_2\right| = \sqrt{\frac{2P_2}{\mathrm{Re}\left[Y_2\right]}} = 21.7 \text{ V}$$

Infine, per calcolare la tensione in modulo e fase alla sezione BB, bisogna conoscere l'onda progressiva nel primo tratto di linea. Essendoci adattamento tra il generatore e il primo tratto di linea, l'onda progressiva, V^+, a destra della sezione AA, vale:

$$V^+ = V_g / 2 = 50 \text{ V}$$

Tale onda si propaga fino alla sezione BB e viene riflessa generando un'onda regressiva che si somma a quella progressiva; la tensione alla sezione BB vale dunque:

$$V_{BB} = V^+ e^{-j\beta l}\left(1 + \Gamma_{BB}\right) = 31.2 - j7.9 \text{ V}$$

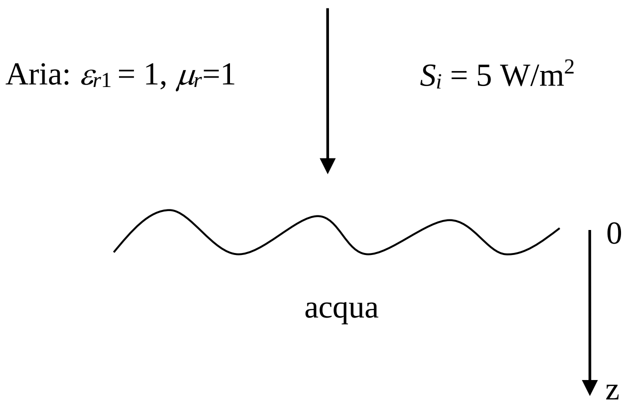
dove $\Gamma_{BB} = \dfrac{Z_{BB} - Z_c}{Z_{BB} + Z_c} = \Gamma_{AA} = \Gamma_g = -0.38 - j0.16$ e $\beta = 2\pi / \lambda_0 = 6.28$ rad/m

Esercizio 5

Un'onda piana uniforme che si propaga in aria (ε_r=1, μ_r=1) alla frequenza di 5 MHz, incide su una superficie d'acqua. Sapendo che all'onda in aria è associata una densità di potenza S_i = 5 W/m^2, calcolare la potenza trasportata dall'onda sotto il pelo dell'acqua ad una profondità z=0.5 m (vedi figura) in caso di:

a. acqua di mare (ε_{r2} = 80 e conducibilità σ = 4 S/m);
b. acqua lacustre (ε_{r2} = 81 e conducibilità $\sigma = 4 \cdot 10^{-3}$ S/m).

Suggerimento: calcolare la tangente di perdita per valutare le approssimazioni possibili.



Soluzione:
Per l'acqua di mare:

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} \approx 180 >> 1 \Rightarrow \text{buon conduttore}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = 0.1125 \text{ m} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\delta} = 8.89 \text{ Np/m}$$

$$Z = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = 2.22 + j2.22 \ \Omega$$

$$\eta_0 \approx 377 \ \Omega$$

$$\Gamma = \frac{Z - \eta_0}{Z + \eta_0} = -0.988 + j0.012$$

$$S_{t0} = S_i (1 - |\Gamma|^2) = 0.12 \text{ W/m}^2$$

$$S_t(z = 0.5) = S_{t0} \exp(-2\alpha z) = 1.6 \times 10^{-5} \text{ W/m}^2$$

Per l'acqua lacustre:

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_{r2}} \approx 0178 << 1 \Rightarrow \text{buon dielettrico}$$

$$\alpha = \frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\phi = \frac{\omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_{r2}}}{2}\mathrm{tg}\phi = 0.0837 \text{ Np/m}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}}} = 41.86 \ \Omega$$

$$\eta_0 \approx 377 \ \Omega$$

$$\Gamma = \frac{Z - \eta_0}{Z + \eta_0} = -0.8$$

$$S_{t0} = S_i(1 - |\Gamma|^2) = 1.8 \text{ W/m}^2$$

$$S_t(z = 0.5) = S_{t0}\exp(-2\alpha z) = 1.65 \text{ W/m}^2$$