Campi Elettromagnetici – Proff. C. Capsoni e C. Riva
Appello del 21 luglio 2008

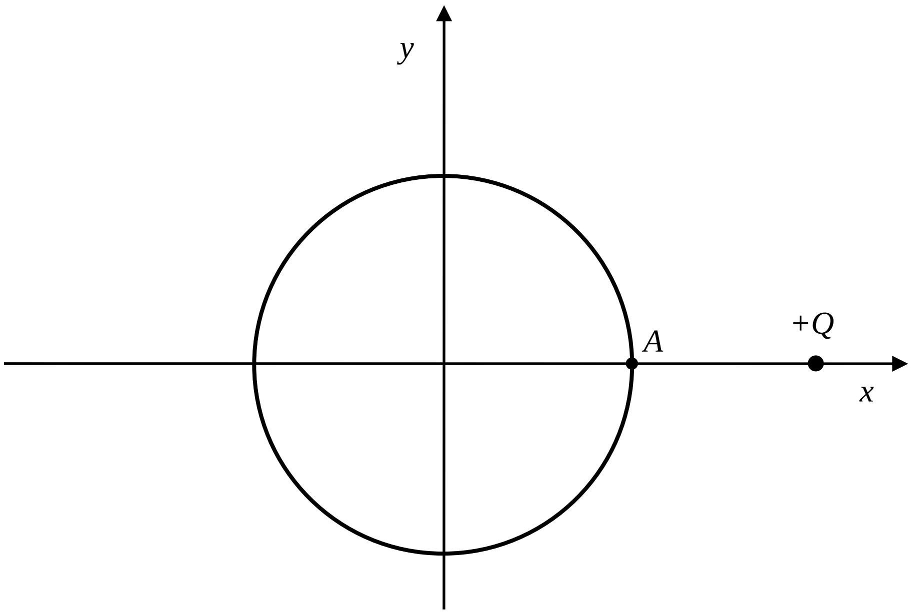
1	2	3	4	5

non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME ______________________________

MATRICOLA______________________________

Esercizio 1

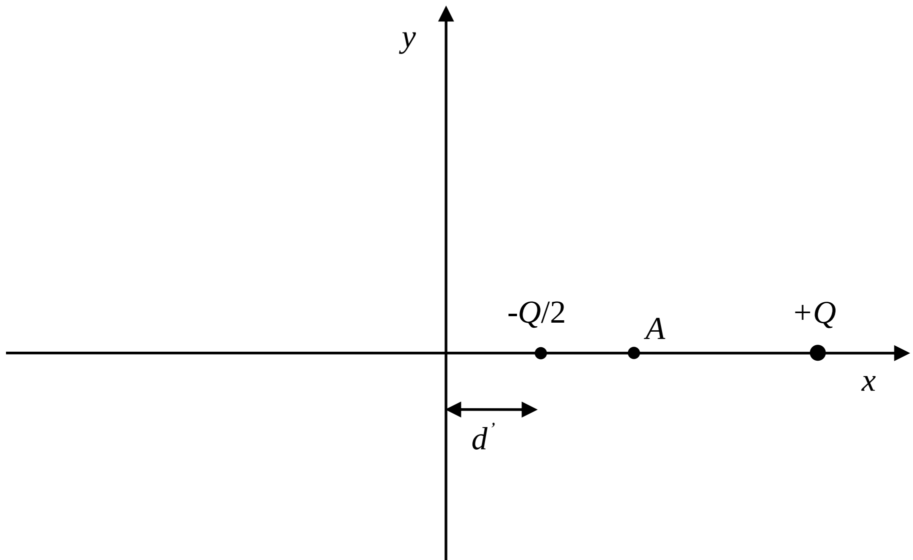


Ad una sfera conduttrice a potenziale nullo (collegata a terra) nel vuoto, viene avvicinata una carica $+Q$ ($Q = 2\pi \cdot 10^{-9}$ C) nel punto di coordinate (0.4,0) (vedi figura). Calcolare:

a. il valore della densità di carica indotta nel punto A(0.2,0);
b. la totale carica indotta sulla sfera.

Soluzione:

Applicando il metodo delle cariche immagine, $+Q$ induce sulla sfera una carica il cui effetto può essere rappresentato da una carica immagine $Q' = -QR/d = -Q/2 = -\pi \cdot 10^{-9}$ C posta sul semiasse $+x$ a distanza $d' = R^2/d = 0.1$ m dall'origine degli assi. La sfera è quindi sostituita dalla carica immagine posta come nella seguente figura:



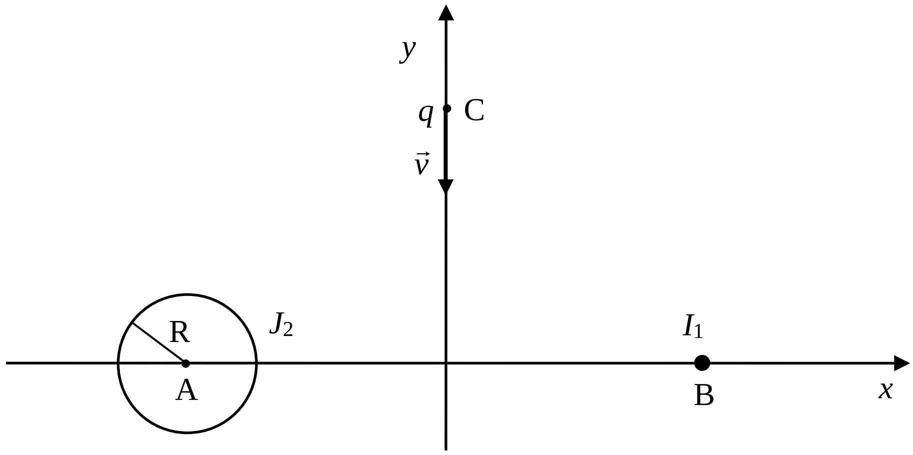
Il calcolo della densità di carica indotta sulla sfera nel punto A passa attraverso il calcolo del campo elettrico normale alla superficie della sfera: $\sigma = D_n = \varepsilon_0 E_n = \varepsilon_0 E_x$. Il campo elettrico generato da entrambe le cariche in A è diretto come $-\vec{\mu}_x$:

$$E_x = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 0.2^2} - \frac{Q/2}{4\pi\varepsilon_0 0.1^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \varepsilon_0 E_x = -\frac{Q}{4\pi 0.2^2} - \frac{Q/2}{4\pi 0.1^2} = -\frac{10^{-9}}{0.2^2\, 2} - \frac{10^{-9}}{0.1^2\, 4} = -3.75 \cdot 10^{-8}$$

C/m^2.

La carica totale indotta sulla sfera è pari a –Q/2.

Esercizio 2



Un filo di lunghezza indefinita, posto in B(0.5 m, 0 m) è attraversato da una corrente I_1 di intensità 2.1 mA che scorre in direzione $-\vec{\mu}_z$. Un cilindro conduttore di lunghezza indefinita, il cui centro è posto in A(-0.5 m, 0 m), è attraversato da una densità di corrente, il cui valore dipende dalla distanza dal centro del cilindro r secondo la legge $\vec{J}_2 = r\,\vec{\mu}_z$ A/m^2 per $0 < r < R$ (R = 0.1 m è il raggio della sezione del cilindro). Determinare:

a. il campo magnetico totale nel punto C(0 m, 0.5 m);
b. la forza a cui è sottoposto un elettrone (di carica $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C) che si trova nel punto C e che viaggia con velocità $\vec{v} = -2\,\vec{\mu}_y$ m/s.

Soluzione:

Punto a.
Il campo totale in C è dato dalla sovrapposizione degli effetti dovuti ai conduttori percorsi da corrente. Il modulo del campo H_1 in C vale:

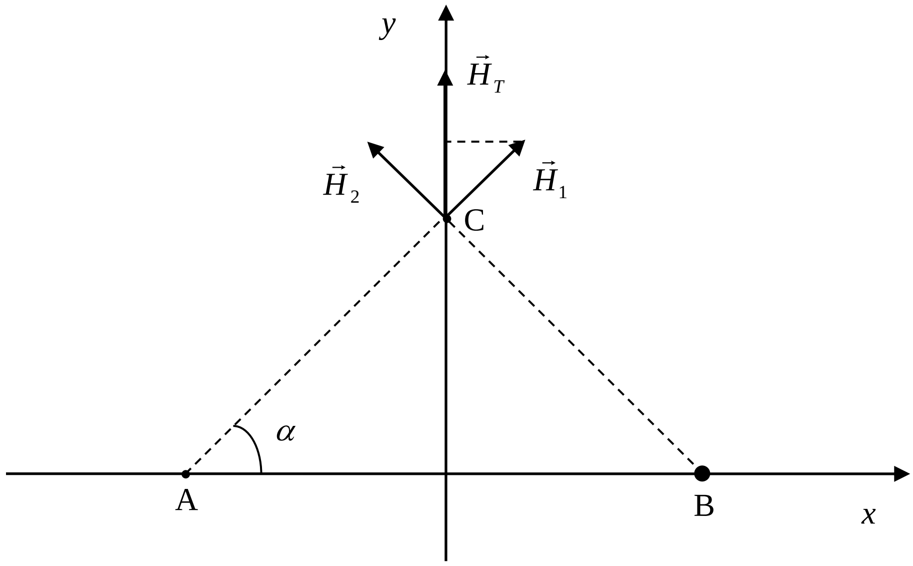
$$\left|\vec{H}_1\right| = \frac{I_1}{2\pi BC} = \frac{2.1 \cdot 10^{-3}}{2\pi 0.5\sqrt{2}} = 4.73 \cdot 10^{-4} \text{ A/m}$$

La corrente I_2 vale: $I_2 = \int_S \vec{J}_2 d\vec{S} = \int_0^R r\ 2\pi r\ dr = 2\pi \int_0^R r^2\ dr = \frac{2}{3}\pi R^3 = 2.1$ mA

Il modulo del campo H_2 in C vale:

$$\left|\vec{H}_2\right| = \frac{I_2}{2\pi AC} = 4.73 \cdot 10^{-4} \text{ A/m}$$

I moduli dei due campi sono uguali dato che le correnti totali che scorrono nei conduttori sono uguali e BC = AC. La seguente figura mostra le direzioni dei campi magnetici, determinate considerando il verso delle correnti e usando la regola della mano destra.



Dato che i moduli dei campi sono uguali e considerando che l'angolo α vale 45° (dalla geometria del problema), il campo magnetico totale risultante vale:

$\vec{H}_T = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = 2\left|\vec{H}_1\right|\cos(\alpha)\vec{\mu}_z = \sqrt{2}\left|\vec{H}_1\right|\vec{\mu}_z = \sqrt{2}\left|\vec{H}_1\right|\vec{\mu}_z = 6.69\cdot 10^{-4}\,\vec{\mu}_z$ A/m

Punto b.

L'elettrone è soggetto alla forza di Lorentz $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$. Dato che il i due vettori sono paralleli, il loro prodotto vettoriale è nullo, così come la forza $\vec{F}$.

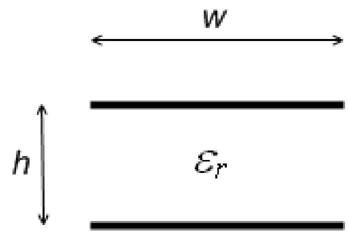
Esercizio 3

Data la linea a striscia mostrata in figura (sezione trasversale), e trascurando gli effetti di bordo si calcoli:

1) il valore del rapporto w/h considerando note l'impedenza caratteristica $Z_C = 47\ \Omega$ e la velocità di propagazione $v = 1.5 \cdot 10^8$ m/s ($\mu_r = 1$);

2) il valore di h e della costante di fase considerando $w = 20$ mm e $f = 350$ MHz;

3) la costante di attenuazione in dB/Km dovuta alle perdite di conduzione **nel dielettrico** ($\sigma_d = 10^{-4}$ S/m).



Soluzione:

Per questa struttura, la capacità e l'induttanza valgono:

$$C = \varepsilon \frac{w}{h}$$

$$L = \mu \frac{h}{w}$$

da cui si deriva l'espressione dell'impedenza caratteristica e della velocità di fase:

$$Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{h}{w}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto. Dalla seconda espressione, si ricava il valore della permittività dielettrica relativa: $\sqrt{\varepsilon_r} = \dfrac{c}{v\sqrt{\mu_r}} = 2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_r = 4$. Dalla prima espressione si ricava invece: $\dfrac{h}{w} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}} Z_C = 0.2495$. Conoscendo poi w, si ottiene anche h: $h = w0.2495 = 5$ mm. La costante di fase vale: $\beta = \omega / v = 14.66$ rad/m.

In questa struttura le perdite sono dovute al dielettrico imperfetto (la conducibilità non è nulla).
L'attenuazione dovuta al dielettrico, causata dalla corrente che attraversa il dielettrico stesso, è:

$$\alpha_d = \frac{g}{2Y_C}$$

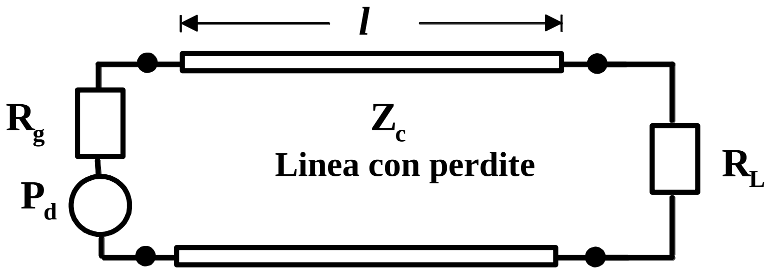
dove Y_C è l'ammettenza caratteristica e g, l'ammettenza per unità di lunghezza, vale, per questa struttura:

$$g = \sigma_d \frac{w}{h} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ S/m}$$

Si ottiene dunque $\alpha_d = 0.0094$ Np/m = 81.65 dB/km.

Esercizio 4

Sia dato un generatore avente frequenza di 300 MHz, impedenza interna R_g=75 Ω e potenza disponibile P_d = 10W, collegato ad un carico R_L = 50 Ω attraverso una linea di trasmissione con perdite, avente impedenza caratteristica 50 Ω, costante di attenuazione 20 dB/km e lunghezza l = 80 m (vedi figura). Si calcoli la potenza dissipata sulla linea.



Soluzione:

Essendo il carico adattato alla linea (R_L = Z_C = 50 Ω), l'impedenza vista alla sezione del generatore (sezione AA) vale Z_{AA} = 50 Ω. La potenza che attraversa la sezione AA e viene ceduta sia alla linea che al carico R_L è:

$$P_{AA} = P_d\left(1-\left|\Gamma_g\right|^2\right) = 9.6 \text{ W}$$

dove $\Gamma_g = \dfrac{Z_{AA}-R_G}{Z_{AA}+R_G} = -0.2$.

La potenza che arriva alla sezione del carico (e viene totalmente assorbita perché R_L = Z_C) dipende dalle perdite della linea e vale ($\alpha = 20$ dB/km = 0.0023 Np/m):

$$P_L = P_{AA}\, e^{-2\alpha l} = 6.64 \text{ W}$$

La potenza dissipata sulla linea è data dalla differenza della potenza che passa la sezione AA e la potenza assorbita dal carico:

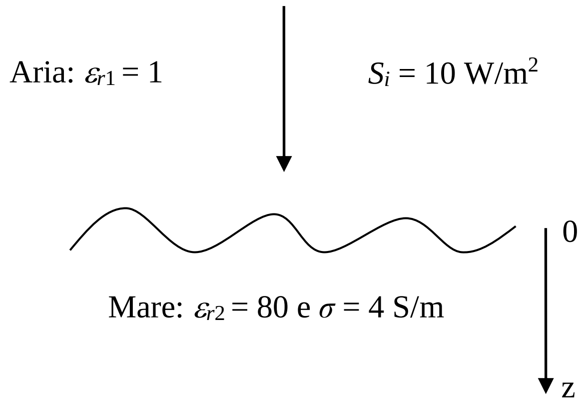
$$P_{diss} = P_{AA} - P_L = 2.96 \text{ W}$$

Esercizio 5

A un'onda piana uniforme trasmessa da una HAP (High Altitude Platform) posta a 20 km di altitudine è associata una densità di potenza S_i = 10 W/m^2. L'onda, che si propaga in aria (ε_{r1} = 1) alla frequenza f = 500 kHz, incide sulla superficie del mare (ε_{r2} = 80 e conducibilità σ = 4 S/m), come mostrato in figura. Determinare:

a. la velocità di propagazione dell'onda nel mare;
b. la lunghezza d'onda nel mare;
c. la distanza dalla superficie del mare z_2 per cui il modulo del campo elettrico vale 10 μV/m.

Suggerimento: calcolare la tangente di perdita per valutare le approssimazioni possibili.



Soluzione:

Per rispondere al punto a) e b) è necessario conoscere la costante di fase β. Dato che il mezzo 2, il mare, è un mezzo con perdite, il calcolo di β passa attraverso il calcolo di γ:

$$\gamma_2 = \alpha_2 + j\beta_2 = \sqrt{j\omega\mu_2(\sigma + j\omega\varepsilon_2)}$$

E possibile tuttavia applicare le approssimazioni per buoni conduttori, dato che $\sigma/(\omega\varepsilon_2) \approx 1798 >> 1$. Si ottiene dunque:

$$\alpha_2 = \beta_2 \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_2\sigma}{2}} = 2.81 \text{ 1/m}$$

Per confronto con il risultato ottenuto, il calcolo di γ_2 secondo la formula esatta fornisce $\gamma_2 = 2.8091 + \text{j}2.8107$ 1/m.

La velocità di propagazione dell'onda è dunque:

$$v_2 = \frac{\omega}{\beta_2} = 1.1 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

La lunghezza d'onda vale:

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{\beta_2} = 2.24 \text{ m}$$

Per quanto riguarda il punto c, è necessario calcolare il coefficiente di trasmissione dell'onda:

$$T = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$$

$\eta_1 = \eta_0 = 377\ \Omega$, mentre η_2, sempre considerando l'approssimazione per buoni conduttori, vale:

$$\eta_2 \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_2}{2\sigma}}(1+j) = 0.7 + j0.7\ \Omega$$

Per confronto con il risultato ottenuto, il calcolo di η_2 secondo la formula esatta fornisce

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma + j\omega\varepsilon_2}} = 0.7027 + \mathrm{j}0.7023\ \Omega$$

Il coefficiente di trasmissione vale dunque T = 0.0037 + j 0.0037.
L'espressione del mulo del campo elettrico nel mezzo 2 è:

$$|E_2(z_2)| = |E_i(0)T\exp(-j\beta_2 z_2)\exp(-\alpha_2 z_2)| = |E_i(0)||T|\ \exp(-\alpha_2 z_2)$$

Il valore di $|E_i(0)|$, il modulo del campo elettrico incidente sulla superficie aria/mare, si ricava dalla densità di potenza trasportata dall'onda incidente (dato che il mezzo 1 è senza perdite, il modulo del campo elettrico è sempre lo stesso in ogni punto del mezzo 1):

$$S_i = \frac{1}{2}\frac{|E_i|^2}{\eta_1} \quad \Rightarrow \quad |E_i| = |E_i(0)| = \sqrt{2S_i\eta_1} = 86.8\ \text{V/m}$$

Invertendo la formula precedente si ottiene:

$$z_2 = \frac{1}{\alpha_2}\ln\left(\frac{|E_i(0)||T|}{|E_2(z_2)|}\right) = 3.8\ \text{m}$$

avendo considerato $|E_2(z_2)| = 10\ \mu\text{V/m}$.