Campi Elettromagnetici – Proff. C. Capsoni e C. Riva
Appello del 10 settembre 2008

1	2	3	4	5

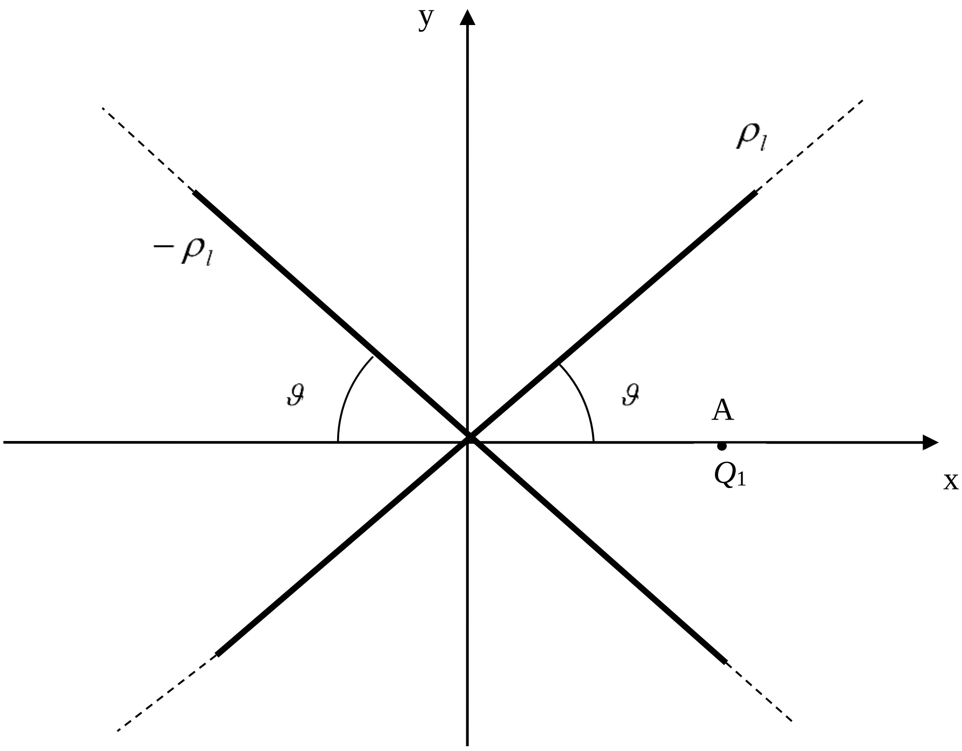
non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME ______________________________

MATRICOLA ______________________________

FIRMA ______________________________

Esercizio 1



$Q_1 = 10^{-3}$ [C] A(5,0) [m] $Q_2 = -10^{-8}$ [C]

$\rho_l = 10^{-12}$ [C/m] $\vartheta = 45°$

Date le due distribuzioni di carica lineare ρ_l e $-\rho_l$ in figura, determinare la posizione della carica Q_2 affinché la carica Q_1 posta in A sia in equilibrio.

Soluzione:

Il campo elettrico in A dovuto alle 2 distribuzioni lineari di carica è:

$$\vec{E_1}(A) = 2 \cdot \frac{\rho_l}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{5}{\sqrt{2}}} \cdot sen(\vartheta) \cdot (-\vec{\mu}_y) = 7.2 \cdot (-\vec{\mu}_y) \qquad [\text{mV/m}]$$

Perché la carica Q_1 sia in equilibrio, il campo elettrico totale in A deve essere nullo. Considerando che $\vec{E_1}(A)$ è diretto come $-\vec{\mu}_y$, ciò si può ottenere posizionando la carica Q_2 sulla retta x = 5 m (su cui giace anche il punto A), a distanza d da Q_1 tale che:

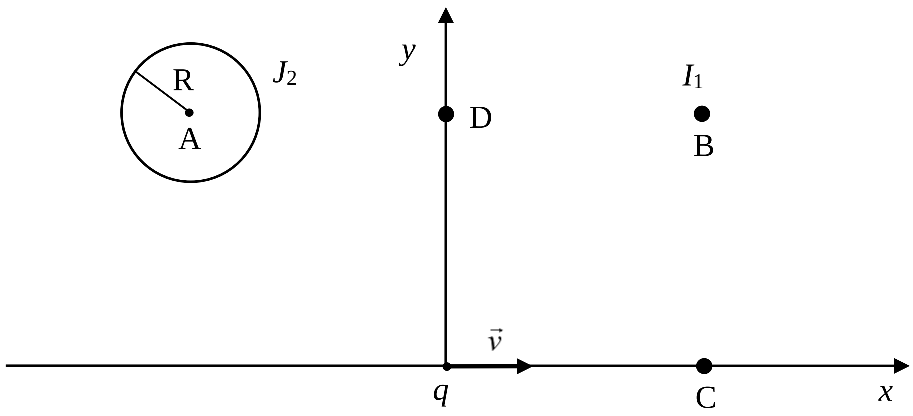
$$\vec{E}(A) = \vec{E_1}(A) + \frac{Q_2}{4\pi\,\varepsilon_0 d^2}\,\vec{\mu}_y = 0 \qquad [\text{V/m}]$$

Si ottiene quindi:

$$d = \sqrt{\frac{|Q_2|}{|\vec{E_1}(A)| 4\pi\varepsilon_0}} = 111.7 \qquad [\text{m}]$$

La carica Q_2 deve essere quindi posta in posizione D(5, 111.7) [m].

Esercizio 2



Un filo di lunghezza indefinita, posto in B(1 m, 1 m) è attraversato da una corrente I_1 di intensità 1 mA che scorre in direzione $\vec{\mu}_z$. Un cilindro conduttore di lunghezza indefinita (di raggio R = 10 cm), il cui centro è posto in A(1 m, 1 m), è attraversato da una densità di corrente uniforme $\vec{J}_2 = -31.9\vec{\mu}_z$ mA/m^2. Inoltre, un elettrone q, posto nell'origine degli assi, viaggia a velocità $\vec{v}$ in direzione $\vec{\mu}_x$ (si faccia riferimento alla figura). Determinare:

a. il campo magnetico totale nell'origine degli assi, dovuto al filo posto in B e al cilindro posto in A;
b. determinare la posizione di un terzo filo di lunghezza indefinita, percorso da una corrente I_3 (da porsi necessariamente o in C(1 m, 0 m) o in D(1 m, 0 m)), per cui sia possibile ottenere campo magnetico totale nullo nell'origine degli assi;
c. dopo aver posizionato il terzo filo secondo il punto b, determinare l'intensità e il verso della corrente I_3 per cui l'elettrone in figura è soggetto a una forza nulla.

Soluzione:

La corrente totale che scorre nel cilindro in A vale:

$$I = \int_S \vec{J}\, d\vec{S} = J_2 R^2 \pi = 1 \text{ mA}$$

Considerando i versi delle correnti nel filo in A e nel cilindro in B, definendo $I = I_1 = I_2 = 1$ mA e $r = r_1 = r_2 = \sqrt{2}$, il campo magnetico totale nell'origine degli assi vale:

$$\vec{H} = -2\frac{I}{2\pi r}\cos(45°)\vec{\mu}_y = -\frac{I}{2\pi}\vec{\mu}_y = -1.59\cdot 10^{-4}\,\vec{\mu}_y \quad \text{[A/m]}$$

Per annullare il campo $\vec{H}$, che è diretto come $-\vec{\mu}_y$, è necessario porre il terzo filo nel punto C(1 m, 0 m) in modo tale che nell'origine esso dia un contributo di campo magnetico parallelo all'asse y. In particolare esso dovrà essere percorso da una corrente diretta come $-\vec{\mu}_z$, in modo tale che il campo magnetico associato nell'origine sia rivolto come $\vec{\mu}_y$ .Il valore della corrente I_3 si trova annullando il campo magnetico totale:

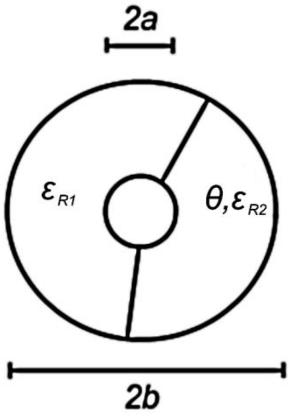
$$\frac{I_3}{2\pi C_x} = \frac{I}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_3}{2\pi 1} = \frac{I}{2\pi}$$

Da cui:

$I_3 = I = 1$ mA.

Essendo nullo il campo magnetico totale nell'origine, anche la forza di Lorentz agente sull'elettrone sarà nulla.

Esercizio 3



$\varepsilon_{R1} = 1$
$\varepsilon_{R2} = 6$
a = 2 mm
b = 8 mm

Data la linea coassiale disomogenea in figura si determini:

a) Il valore dell'angolo θ, sapendo che la velocità di propagazione dell'onda nella linea coassiale è $v = 1{,}6 \cdot 10^8 m/s$
b) L'impedenza caratteristica della linea
c) L'attenuazione espressa in dB/km dovuta alle perdite nei conduttori ($\sigma = 5 \cdot 10^7$ S/m) ad una frequenza di 1 GHz;

Soluzione:

La misura dell'angolo θ influisce solo sulla capacità del condensatore, dal momento che l'induttanza non è condizionata dalla presenza del dielettrico.

La capacità della linea coassiale può essere vista come la capacità di due strutture in parallelo contenenti dielettrici diversi e composte ciascuna da una frazione del coassiale stesso. La capacità totale varrà, quindi:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)} \cdot \left(\varepsilon_{R1}\left(1 - \frac{\theta}{360}\right) + \varepsilon_{R2}\frac{\theta}{360} \right)$$

E cioè: $C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(4)} \cdot \left(1 - \frac{\theta}{360} + 6 \cdot \frac{\theta}{360}\right) = 80{,}26 \cdot \left(1 + \frac{\theta}{72}\right)$ pF/m = $40{,}13 \cdot \left(1 + \frac{\theta}{72}\right) \cdot 10^{-12}$ F/m

L'induttanza della linea è pari a:

$$L = L_0 = \frac{\mu_0\varepsilon_0}{C_0} = \mu_0\varepsilon_0 \cdot \frac{\ln(4)}{2\pi\varepsilon_0} = 277{,}26 \text{ nH/m} = 277{,}26 \cdot 10^{-9} \text{ H/m}$$

La velocità è pari a $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ed è nota ($v = 1{,}6 \cdot 10^8 m/s$).

Ne risulta che $1{,}6 \cdot 10^8 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{277{,}26 \cdot 40{,}13 \cdot 10^{-21} \cdot \left(1 + \frac{\theta}{72}\right)}}$

E quindi $\sqrt{\left(1+\frac{\theta}{72}\right)}\cdot 1{,}6\cdot 10^{8} = 3{,}0\cdot 10^{8}$ e $\theta \cong 180{,}8°$.

L'impedenza caratteristica vale $Z_c = v\cdot L = \frac{L}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$ e quindi $Z_C = 44.36 \ \ \Omega$.

L'attenuazione dovuta alla conducibilità finita dei conduttori vale: $\alpha = \frac{r}{2Z_C}$ Np/m.

La resistenza per unità di lunghezza vale:

$$r = \frac{1}{\sigma\delta\, p} \quad \Omega/\mathrm{m}$$

dove lo spessore di penetrazione δ vale:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f\mu\sigma}} = 2{,}25\ \mu\mathrm{m}$$

mentre *p* è la misura del perimetro della sezione del conduttore. Nel caso del coassiale quindi *r* vale:

$$r = \frac{1}{\sigma\delta\, 2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = 0{,}884 \quad \Omega/\mathrm{m}$$

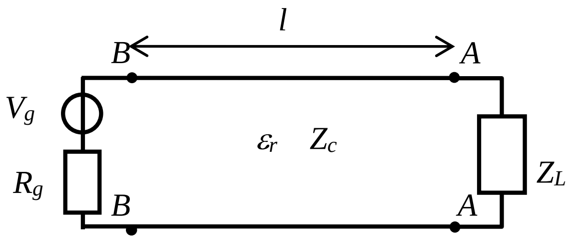
L'attenuazione vale dunque:

$$\alpha = \frac{r}{2Z_C} = 10^{-2}\ \text{Np/m} = 10\ \text{Np/km} = 10\cdot 8.686\ \text{dB/km} = 86.86\ \text{dB/km}$$

Esercizio 4

Un generatore alimenta tramite un cavo coassiale riempito di dielettrico con ε_r=3.24 e con impedenza caratteristica Z_c=50 Ω un carico Z_L=50 – j 50 Ω. La frequenza di operazione è 200 MHz. Calcolare:

a. posizione dei massimi e minimi della tensione lungo la linea (distanza dalla sezione del carico);
b. distanza (m) tra i massimi e i minimi;
c. ROS
d. Valore della resistenza e della capacità che compongono il carico.



f = 200 MHz
R_g = 50 Ω
Z_L = 50 – j 50 Ω
Z_c = 50 Ω
ε_r = 3.24
l = 50 cm

Soluzione:

La lunghezza d'onda vale $\lambda = c/\left(f\sqrt{\varepsilon_R}\right) = \dfrac{5}{6}$ m.

La lunghezza normalizzata alla lunghezza d'onda vale $\bar{l} = l/\lambda = 0{,}6 = 0{,}5 + 0{,}1$

L'impedenza normalizzata alla sezione AA vale $\overline{Z_{AA}} = 1 - j$. Con una rotazione di 0,1 sulla carta di Smith si passa a $\overline{Z_{BB}} = 0{,}44 - 0{,}34j$ e cioè $Z_{BB} = 22 - 17j$.

Il primo minimo in tensione allontanandosi dal carico si ha quando il coefficiente di riflessione Γ è reale puro e ha valore minimo, e cioè dopo una rotazione sulla carta pari a $0{,}162 \cdot \lambda = 13{,}5\,\text{cm}$
Il primo massimo in tensione si ha quando il coefficiente di riflessione Γ è reale puro e ha valore massimo, e cioè dopo una rotazione sulla carta pari a $0{,}162 \cdot \lambda + 0{,}25 \cdot \lambda = 0{,}412 \cdot \lambda \approx 34{,}33\,\text{cm}$

La distanza fra massimo e minimo è, ovviamente, $\dfrac{\lambda}{4} = \dfrac{5}{24}\,\text{cm} \approx 20{,}83\,\text{cm}$

Il valore del ROS si calcola conoscendo il modulo del coefficiente di riflessione.

$$|\Gamma| = \frac{\left|\overline{Z_{BB}} - 1\right|}{\left|\overline{Z_{BB}} + 1\right|} = \frac{|1 - j - 1|}{|1 + j + 1|} = \frac{1}{|2 + j|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}447$$

(si può anche valutare il valore approssimativo del modulo direttamente sulla Carta di Smith)

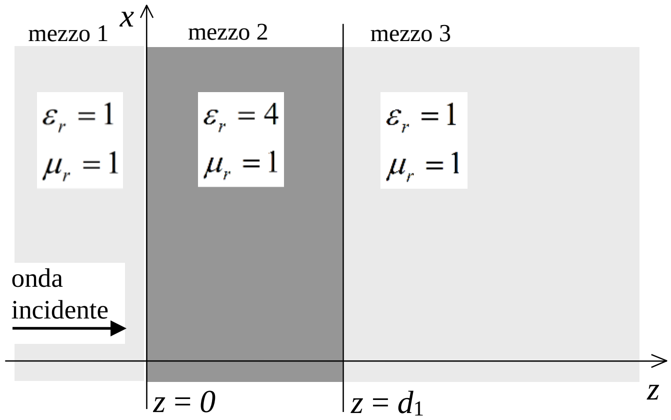
$$ROS = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 0{,}447}{1 - 0{,}447} \approx 2{,}617$$

Se si considera Z_L = 50 – j 50 Ω composto dalla serie di una resistenza e un condensatore si ha che $Z_L = R + \dfrac{1}{j\omega C} = R - j\dfrac{1}{\omega C}$. Si ottiene quindi che R = 50 Ω e $C = \dfrac{1}{50 \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} = 0{,}159$ pF.

Esercizio 5

Dato il multistrato di figura (d_1=50 cm), si supponga che un'onda piana uniforme si propaghi nel mezzo 1 (aria) in direzione +z con campo elettrico incidente alla sezione z = 0 pari a $\vec{E}_i = 5\vec{a}_y\,(\mathrm{V/m})$ alla frequenza di 300 MHz. Calcolare:

a. la densità di potenza trasmessa al mezzo 3 (aria come il mezzo 1);
b. il modulo del campo elettrico totale nel mezzo 2 nelle sezioni z = 12.5 cm e z = 25 cm .



Soluzione:

a. Poiché $\lambda_2 = \dfrac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}\,f} = 50$ cm, lo strato centrale (mezzo 2) è uno strato λ e quindi il coefficiente di riflessione nella sezione z = 0 del mezzo 1, $\Gamma_1(z=0)$, è pari a 0. Si ha quindi:

$$S_{t2} = S_i = \frac{|E_i|^2}{2\eta_1} = 33.2\ \frac{\mathrm{mW}}{\mathrm{m}^2}$$

b. Nella sezione z = 0 si ha

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{20}^{+}\left(1+\Gamma_2(z=0)\right) = 5\vec{a}_y\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Poiché $\Gamma_2(z = 25\,\mathrm{cm} = \lambda_2/2) = \Gamma_2(z=0)$, allora:

$$\left|\vec{E}_2(z=25\,\mathrm{cm})\right| = \left|\vec{E}_{20}^{+}e^{-j\beta_2 0.25}\right|\left|1+\Gamma_2(z=25\,\mathrm{cm})\right| = \left|\vec{E}_{20}^{+}\right|\left|1+\Gamma_2(z=0)\right| = \left|\vec{E}_i\right| = 5\vec{a}_y\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

Analogamente poiché $\Gamma_2(z = 12.5\,\mathrm{cm} = \lambda_2/4) = -\Gamma_2(z=0)$, allora:

$$\left|\vec{E}_2(z=12.5\,\mathrm{cm})\right| = \left|\vec{E}_{20}^{+}e^{-j\beta_2 0.125}\right|\left|1+\Gamma_2(z=12.5\,\mathrm{cm})\right| = \left|\vec{E}_{20}^{+}\right|\left|1-\Gamma_2(z=0)\right| = \frac{\left|\vec{E}_i\right|\left|1-\Gamma_2(z=0)\right|}{\left|1+\Gamma_2(z=0)\right|}.$$

Poiché $\Gamma_2(z=0) = \dfrac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1+\eta_2}$, allora:

$$\left|\vec{E}_2(z=12.5\,\mathrm{cm})\right| = \frac{\left|\vec{E}_i\right|\eta_2}{\eta_1} = \frac{\left|\vec{E}_i\right|}{2} = 2.5\vec{a}_y\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$