Campi Elettromagnetici – Proff. C. Capsoni, G. Gentili e C. Riva
2a prova: 05-02-2005

non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME _____

MATRICOLA _____

FIRMA _____

Esercizio 1

Dimensionare la linea (determinare il valore di w) in figura 1 (di cui è mostrata la sezione trasversa) e calcolare la velocità di propagazione v, non tenendo in considerazione gli effetti di bordo e sapendo che:

$\varepsilon_{r1} = 2$ $\varepsilon_{r2} = 4$ $h = 2$ mm $Z_c = 50\ \Omega$ $f = 100$ MHz

Supponendo ora che i conduttori siano perfetti e che i dielettrici abbiano delle perdite (le stesse per entrambi), si determini la costante di attenuazione della linea α in [dB/cm] nei due casi:

1) $\sigma_d = 0$ S/m 2) $\sigma_d = 10^{-4}$ S/m ($\sigma_d = \omega\varepsilon_0\varepsilon_r \tan\delta_\varepsilon$)

Se la linea fosse stata come in figura 2, quali risultati sarebbero cambiati?

Figura 1

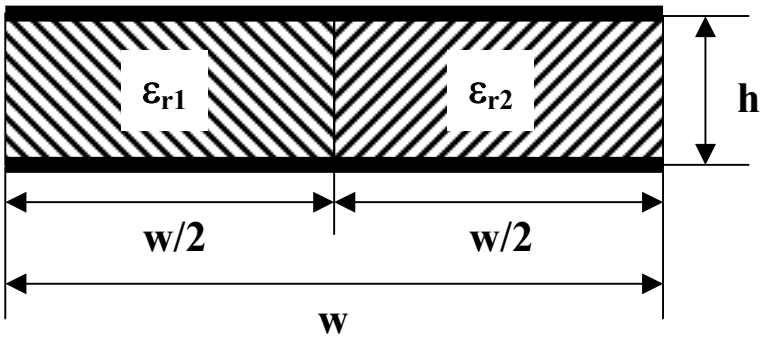
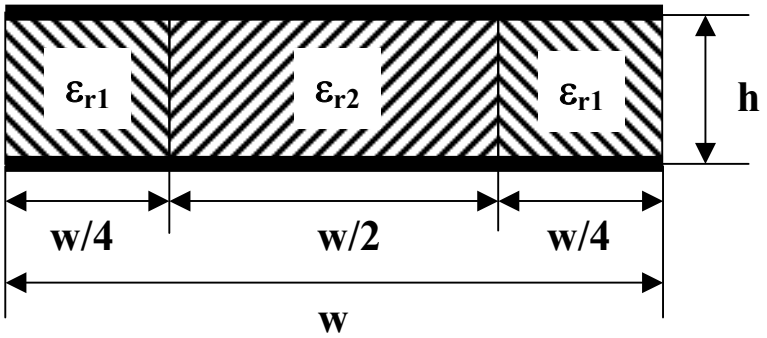


Figura 2



Soluzione:

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$L = L_0 = \mu_0 \frac{h}{w}$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_1 \frac{w}{h} + \frac{1}{2}\varepsilon_2 \frac{w}{h}$$

da cui:

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0 \frac{h}{w}}{\frac{1}{2}\varepsilon_0 (\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}) \frac{w}{h}}} = 377 \bullet \frac{h}{w}\sqrt{\frac{2}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}}$$

e quindi:

$$w = 377 \bullet \frac{h}{Z_c}\sqrt{\frac{2}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}} = 8{,}7 \times 10^{-3} m = 8{,}7 mm$$

inoltre:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L \bullet C}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \frac{h}{w} \bullet \varepsilon_0 (\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}) \bullet \frac{w}{h} \bullet \frac{1}{2}}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})}} = 1{,}732 \times 10^8 \, m/s$$

Per la costante di attenuazione:

1) $\alpha = 0$ Niente perdite.

2) $\alpha = \frac{gZ_c}{2}$ con: $g = \sigma_d \frac{w}{h}$ da cui: $\alpha = \frac{1}{2}\sigma_d \frac{w}{h} Z_c = 10{,}875 \times 10^{-3} \, Np/m$

$\alpha = 9{,}446 \times 10^{-4} \, dB/cm$

Se la linea fosse come in figura 2 non cambierebbe nulla.

Esercizio 2

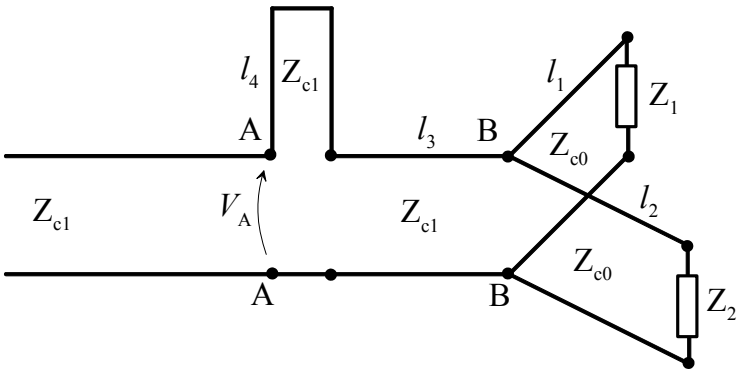
Una linea coassiale di impedenza caratteristica Z_{c1}, alimentata da un generatore con potenza disponibile $P_d = 100$ W e impedenza interna Z_{c1}, è collegata attraverso linee secondarie (rapporto $b/a = k$ e $\varepsilon_r = 1$, $Z_{c0} = 50\,\Omega$) ad un sistema di carichi come in figura. La frequenza di lavoro è 100 MHz. Si calcoli:

a) la lunghezza l_2 tale che i due carichi Z_1 e Z_2 assorbano la stessa potenza (i due carichi riportati alla sezione BB devono quindi presentare la stessa ...);

b) l'impedenza caratteristica Z_{c1} (rapporto $b/a = k$ e $\varepsilon_r = 2$);

c) la potenza reale assorbita dalla rete.

Dati: f = 100 MHz, $l_1 = 75$ cm, $l_3 = 3$ m, $l_4 = 26$ cm, $Z_1 = 50 + j50$ Ohm, $Z_2 = 75$ Ohm.



Soluzione:

a)

I due carichi devono essere riportati alla sezione B – B e lì devono presentare la medesima parte reale dell'Ammettenza essendo in parallelo.

$\lambda = \dfrac{c}{f} = 3$ m Visto che: $\varepsilon_r = 1$

dato che: $l_1 = 75$ cm ne segue che: $l_1 = \dfrac{\lambda}{4}$

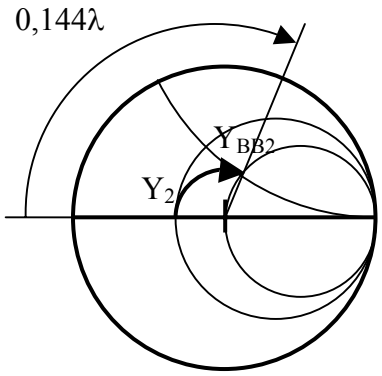
se: $Z_1 = 50 + j50\ \Omega$ allora, normalizzando, ottengo: $\overline{Z_1} = 1 + j$

siccome $l_1 = \dfrac{\lambda}{4}$ allora: $\overline{Y_{BB1}} = 1 + j$

quindi deve essere: $\mathrm{Re}\left(\overline{Y_{BB2}}\right) = 1$

Sulla Carta di Smith mi sposto da $\overline{Y_2} = 0{,}667$ verso il generatore fino ad incrociare il cerchio delle parti reali pari a 1, raggiungendo il punto $\overline{Y_{BB2}} = 1 + j0{,}41$ con uno spostamento pari a :

$l_2 = 0{,}144\lambda = 43{,}2$ cm



b)
Dalla prima parte ottengo:

$$Z_{c0} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu\left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)^2}{(2\pi)^2\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi} = \eta_0\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi} \qquad \Omega$$

quindi:

$$\frac{b}{a} = e^{\frac{2\pi Z_{c0}}{377}} = 2{,}3$$

da cui:

$$Z_{c1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi} = \eta_0\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi} = \frac{Z_{c0}}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} = \frac{Z_{c0}}{\sqrt{2}} = 35{,}35 \qquad \Omega$$

c)
La potenza reale assorbita dalla rete è:

$$P_{ass} = P_d\left(1 - |\Gamma_G|^2\right) \qquad \text{W}$$

con:

$$\Gamma_G = \frac{Z_{AA} - Z_{c1}}{Z_{AA} + Z_{c1}}$$

Calcolo quindi Z_{AA}

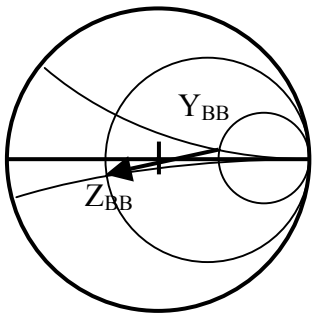
$$\overline{Y_{BB}} = \overline{Y_{BB1}} + \overline{Y_{BB2}} = 2 + j1{,}41$$

da cui, usando la Carta di Smith:

$$\overline{Z_{BB}} = 0{,}334 - j0{,}235$$

da cui:

$$Z_B = 16{,}7 - j11{,}8 \qquad \Omega$$



ma:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2}}$$

$$l_3 = 3m = 1{,}4142\lambda$$

quindi, mi muovo sulla carta di Smith da $Z_B = 16{,}7 - j11{,}8\ \Omega$ che normalizzato a Z_{c1} dà:

$$\overline{Z_{BB_{c1}}} = 0{,}472 - j0{,}338$$

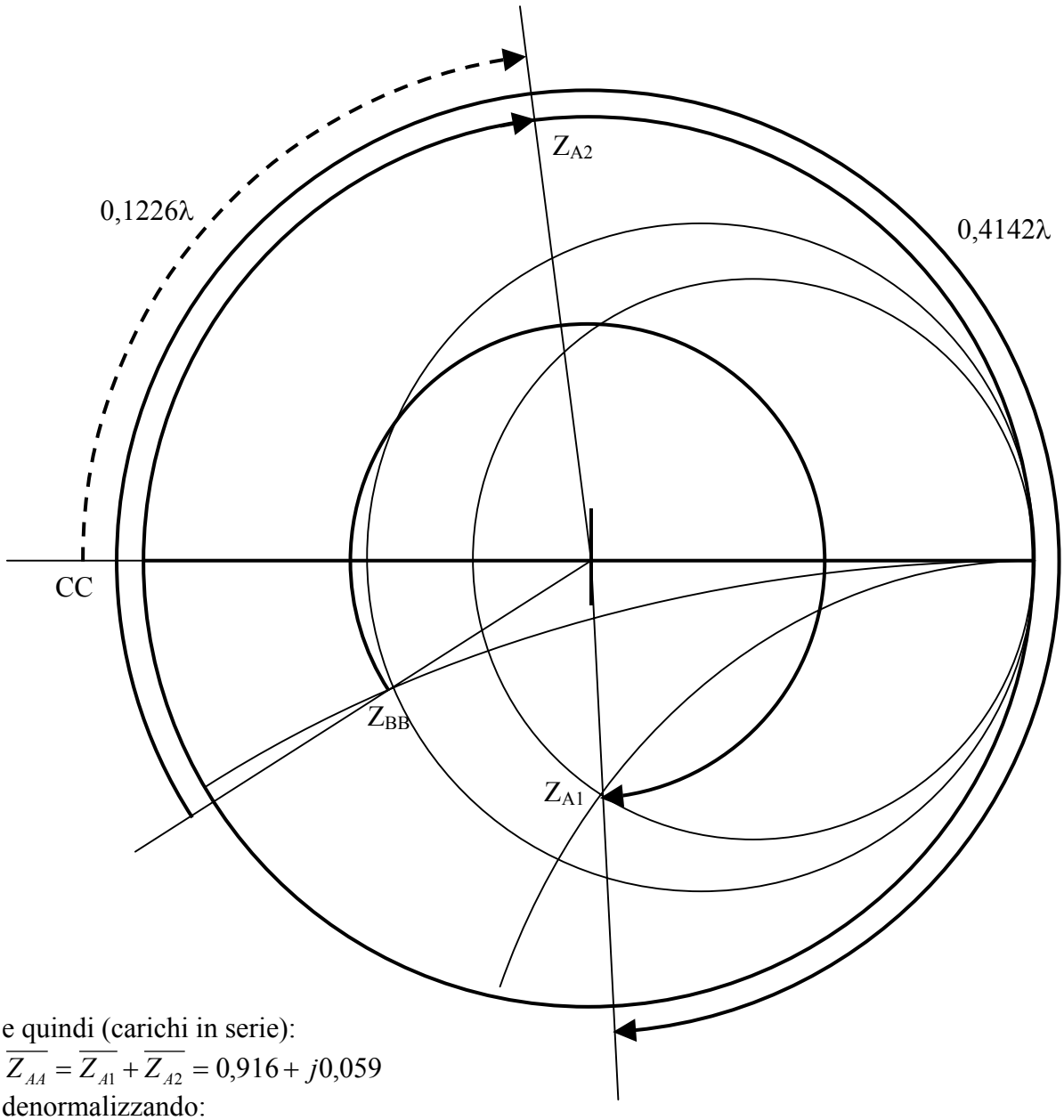
di $1{,}4142\lambda$ verso il generatore e ottengo:

$\overline{Z_{A1}} = 0{,}916 - j0{,}866$

Calcolo Z_{A2}:

Mi muovo dal corto circuito di l_4 normalizzato a λ (0,1226 λ) verso il generatore e ottengo:

$\overline{Z_{A2}} = j0{,}925$



e quindi (carichi in serie):

$\overline{Z_{AA}} = \overline{Z_{A1}} + \overline{Z_{A2}} = 0{,}916 + j0{,}059$

denormalizzando:

$Z_{AA} = 32{,}4 + j2{,}1 \qquad \Omega$

da cui:

$$|\Gamma_G| = \left|\frac{Z_{AA} - Z_{c1}}{Z_{AA} + Z_{c1}}\right| = 0{,}0594$$

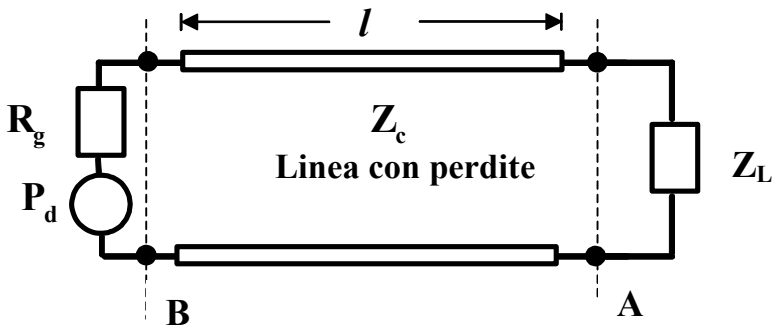
e quindi:

$$P_{ass} = P_d\left(1 - |\Gamma_G|^2\right) = 100\left(1 - (0{,}0594)^2\right) = 99{,}71 \qquad \text{W}$$

Esercizio 3

Sia dato un generatore avente frequenza di 150 MHz e impedenza interna R_g, collegato ad un carico Z_L = 100+j50 Ω attraverso una linea di trasmissione con perdite, avente impedenza caratteristica 50 Ω, ε_r=4, costante di attenuazione 25 dB/km e lunghezza l = 80 m (vedi figura). Si calcoli:

a) la potenza erogata dal generatore se R_g = 75 Ω;
b) la potenza assorbita dal carico se R_g = 50 Ω.



Soluzione:

a)

$$\alpha = \frac{25}{8686} = 0{,}0029 \quad \text{Np/m}$$

$$\lambda = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_r}} = 1 \text{ m}$$

da cui:

$l = 80\lambda$

essendo:

$\overline{Z_A} = 2 + j$

dopo un tratto pari a l mi trovo nello stesso punto della carta di Smith, ma devo tener conto delle perdite, quindi:

$$|\Gamma_B| = |\Gamma_A| e^{-2\alpha l} = \left|\frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}\right| e^{-2\alpha l} = 0{,}447 \bullet 0{,}631 = 0{,}282$$

dalla carta di Smith leggo:

$\overline{Z_B} = 1{,}6 + j0{,}44$

denormalizzando:

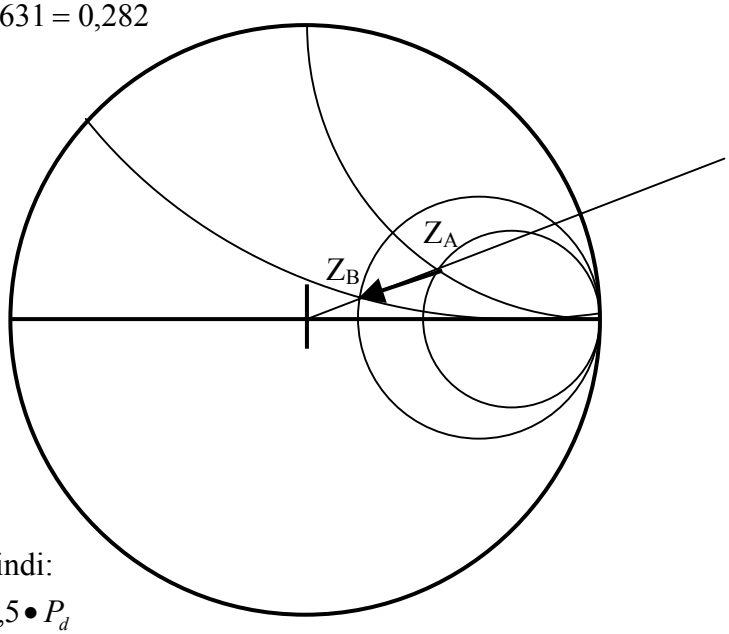
$Z_B = 80 + j22 \qquad \Omega$

da cui:

$$|\Gamma_G| = \left|\frac{Z_B - R_G}{Z_B + R_G}\right| = 0{,}144$$

quindi:

$$P_G = P_d\left(1 - |\Gamma_G|^2\right) = P_d \bullet 0{,}98$$



b)

In questo caso il generatore è adattato, quindi:

$$P_L = P_d\left(1 - |\Gamma_A|^2\right)e^{-2\alpha l} = P_d \bullet 0.8 \bullet 0{,}631 = 0{,}5 \bullet P_d$$

Esercizio 4

Un'onda piana si propaga in direzione x in un mezzo avente $\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 3$, $\sigma = 0.01$ S/m. La frequenza dell'onda è di 300 MHz. Per $x = 0$ il fasore campo elettrico è reale e vale 5 V/m. Si determini:

a) il fasore campo magnetico per $x = 0$ (modulo e fase);
b) il fasore campo magnetico per $x = 0.5$ m (modulo e fase);
c) la densità di potenza (reale), per $x = 0$.
d) la densità di potenza (reale), per $x = 0.5$ m.

Soluzione

a)

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = 214{,}3 + j21{,}2 \qquad \Omega$$

quindi:

$$H(x=0) = \frac{E(x=0)}{\eta} = \frac{5}{214{,}3 + j21{,}2} = 0{,}023 - j0{,}0023 \qquad \text{A/m}$$

$$|H| = 0{,}023 \qquad \text{A/m}$$

$$\angle(H) = -5{,}6°$$

b)

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = 1{,}082 + j10{,}94 = \alpha + j\beta \qquad 1/\text{m}$$

da cui:

$$H(x=0{,}5) = H(x=0)e^{-\gamma 0{,}5} = 0{,}01 + j0{,}0088 \qquad \text{A/m}$$

$$|H| = 0{,}013 \qquad \text{A/m}$$

$$\angle(H) = 40{,}8°$$

c)

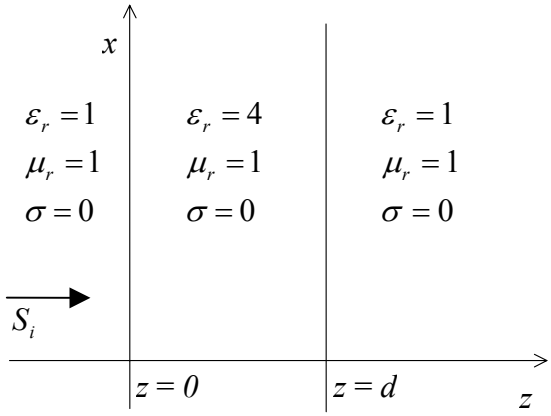
$$S = \frac{|E|^2}{2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\eta}\right) = 0{,}0578 \qquad \text{W/m}^2$$

d)

$$S = 0{,}0578 \bullet e^{-2\alpha 0{,}5} = 0{,}0196 \qquad \text{W/m}^2$$

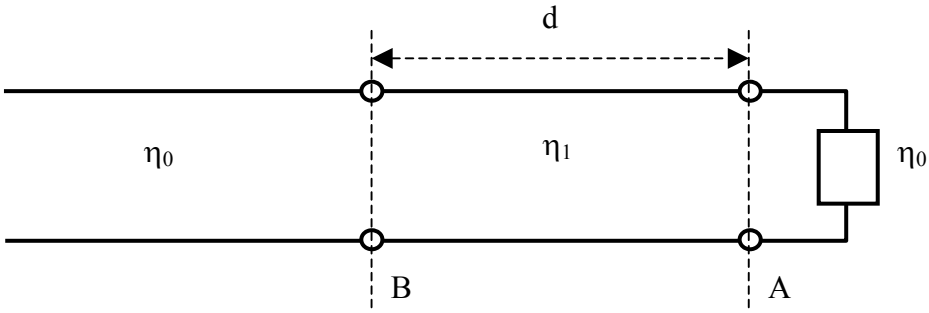
Esercizio 5

Dato il multistrato di figura, si supponga che un'onda piana uniforme si propaghi nel mezzo 1 in direzione +*z* con densità di potenza S_i = 1 W/m^2 alla frequenza di 100 MHz. Calcolare il modulo del campo elettrico alla sezione $z = d$ = 50 cm .



Soluzione:

Disegniamo la linea equivalente:



Calcolo η_1:

$$\eta_1 = \frac{377}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 188{,}5 \qquad \Omega$$

ma:

$$\lambda = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_r}} = 1{,}5 \qquad \text{m}$$

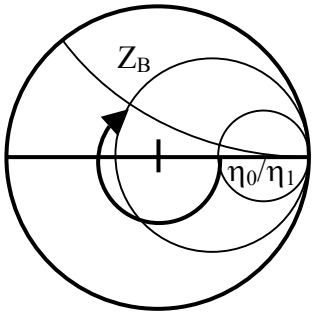
da cui:

$$d = \frac{\lambda}{3}$$

$$\overline{\eta_0} = 2$$

Mi sposto sulla Carta di Smith da $\overline{\eta_0} = 2$ di un tratto pari a d e ottengo:

$$\overline{Z_B} = 0{,}614 + j0{,}398$$



denormalizzando:

$Z_B = 115{,}8 + j75 \qquad \Omega$

Si ha quindi:

$$|\Gamma_G| = \left|\frac{Z_B - \eta_0}{Z_B + \eta_0}\right| = 0{,}55$$

Per cui la densità di potenza trasmessa sarà:

$S_t = S_i\left(1 - |\Gamma_G|^2\right) = 0{,}697 \qquad \text{w/m}^2$

Non essendoci perdite:

$|E(z = d)| = \sqrt{2 S_t \eta_0} = 22{,}9 \qquad \text{V/m}$