Campi Elettromagnetici – Proff. C. Capsoni e C. Riva
Appello del 2 febbraio 2010

1	2	3	4	5

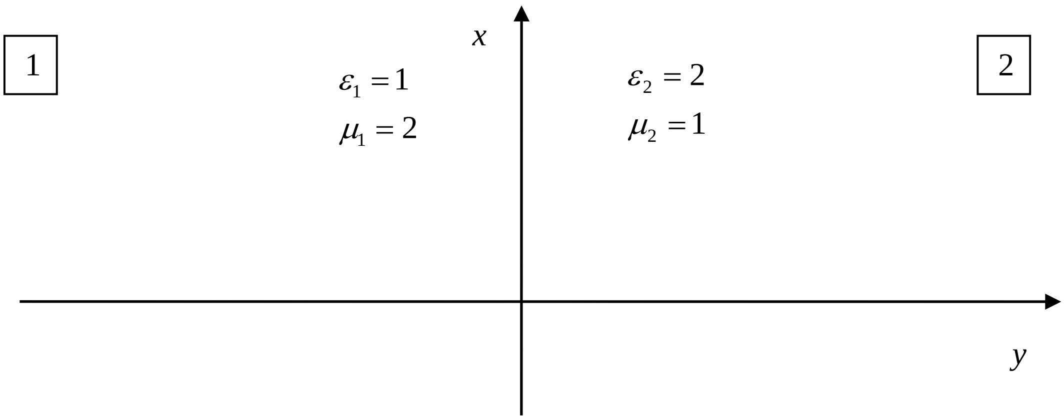
non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME ______________________________

MATRICOLA ______________________________

FIRMA ______________________________

Esercizio 1



Dati i due semispazi in figura (semispazio 1 per $x < 0$, semispazio 2 per $x > 0$) e dati i campi elettrico e magnetico nel semispazio 2:

$$\overrightarrow{E_2} = \overrightarrow{a_x} + 3 \cdot \overrightarrow{a_y} \text{ [V/m]}$$

$$\overrightarrow{H_2} = 2 \cdot \overrightarrow{a_x} + 2 \cdot \overrightarrow{a_y} \text{ [A/m]}$$

Determinare i campi elettrici e magnetico nel semispazio 1 ($\overrightarrow{E_1}$, $\overrightarrow{H_1}$) nel caso in cui all'interfaccia ($x = 0$) tra i due semispazi ci sia una densità superficiale di carica $\sigma = 2 \cdot 10^{-10}$ [C/m^2] e una densità di corrente superficiale nulla.

Soluzione:
Dato che non c'è densità di corrente superficiale, si conservano le componenti tangenti di E e di H e la componente normale di B. Per la componente normale di D, bisogna considerare invece la presenza della densità di corrente superficiale.

Per il campo magnetico:

$$H_{t1} = H_{t2} \Rightarrow H_{x1} = H_{x2} = 2 \quad \text{[A/m]}$$

$$B_{n1} = B_{n2} \Rightarrow H_{y1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} H_{y2} = \frac{1}{2} 2 = 1 \quad \text{[A/m]}$$

Il campo magnetico totale nel mezzo 1 risulta:

$\overrightarrow{H}_1 = 2\overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_y}$ [A/m]

Per il campo elettrico:

$E_{t1} = E_{t2} \Rightarrow E_{x1} = E_{x2} = 1$ [V/m]

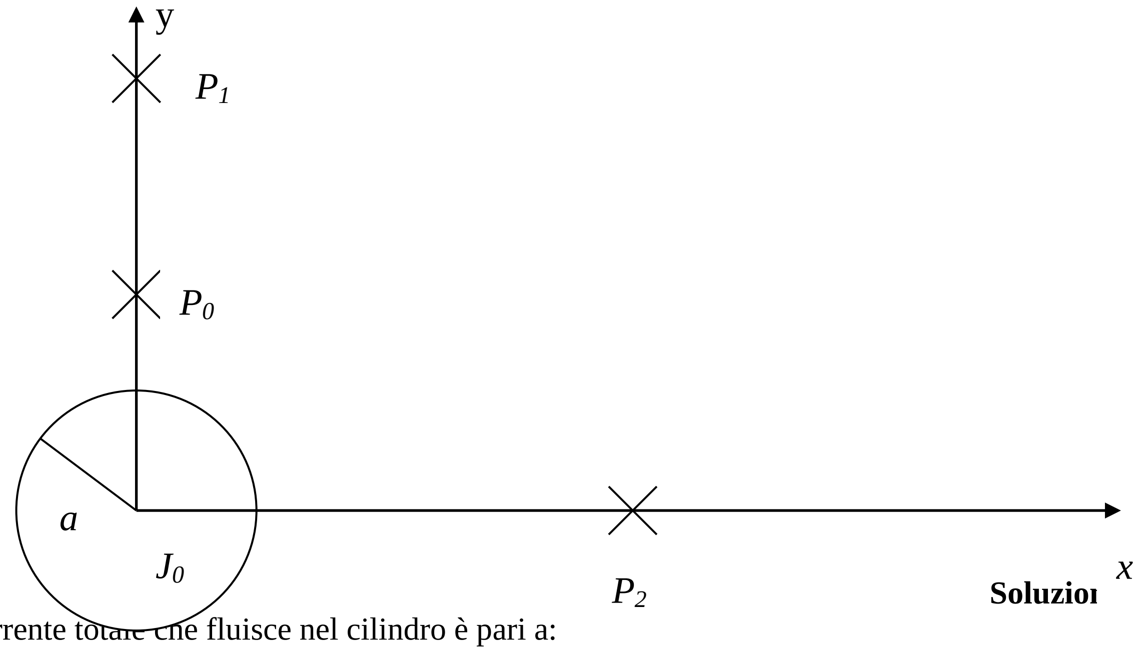
$$-D_{n1} + D_{n2} = \sigma \Rightarrow E_{y1} = \frac{\varepsilon_2 E_{y2} - \sigma}{\varepsilon_1} \approx -16.6 \quad \text{[V/m]}$$

Il campo elettrico totale nel mezzo 1 risulta:

$\overrightarrow{E}_1 = \overrightarrow{a_x} - 16.6\overrightarrow{a_y}$ [V/m]

Esercizio 2

Un cilindro conduttore (asse coincidente con l'asse *z*, raggio $a = 1$ cm) è percorso da una densità di corrente uniforme pari a $J_0 = 10 \cdot \overrightarrow{a_z}$ (A/m^2). Un filo percorso da corrente costante pari a $I_1 = -2 \cdot \overrightarrow{a_z}$ (mA) è posto nel punto P_1 di coordinate $x_1 = 0$ cm, $y_1 = 20$ cm e un altro filo percorso da corrente costante pari a $I_2 = \cdot \overrightarrow{a_z}$ (mA) è posto nel punto P_2 di coordinate $x_2 = 5$ cm, $y_2 = 0$ cm.
Determinare il vettore campo magnetico totale nel punto $P_0(0, y_0 = 5\,\text{cm})$.



Soluzioı

La corrente totale che fluisce nel cilindro è pari a:

$$\vec{I}_c = \vec{J}_0\, \pi\, a^2 = 3.1 \vec{a}_z \quad [\text{mA}]$$

Considerando la regola della mano destra e le direzioni delle tre correnti, i campi generati in P_0 sono:

$$\vec{H}_0 = -\frac{I_c}{2\,\pi\, y_0} \vec{a}_x = -10 \vec{a}_x \ [\text{mA/m}]$$

$$\vec{H}_1 = -\frac{|I_1|}{2\,\pi\,(y_1 - y_0)} \vec{a}_x = -2.1 \vec{a}_x \ [\text{mA/m}]$$

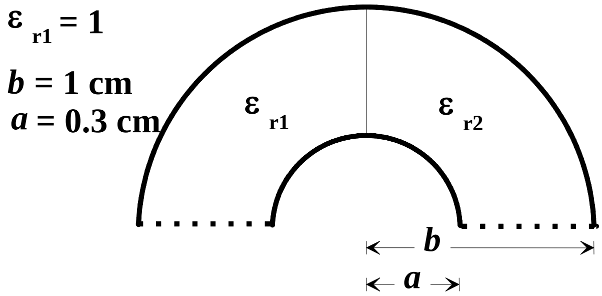
$$\vec{H}_2 = -\frac{|I_2|}{2\,\pi\, P_0P_2} \cos(45°) \vec{a}_x - \frac{|I_2|}{2\,\pi\, P_0P_2} \cos(45°) \vec{a}_y = -1.6 \vec{a}_x - 1.6 \vec{a}_y \ [\text{mA/m}]$$

Il campo magnetico totale è dunque:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = -13.7 \vec{a}_x - 1.6 \vec{a}_y$$

Esercizio 3

Dato il cavo coassiale parzialmente riempito di dielettrico in figura, si dimensioni il parametro ε_{r2} in modo che l'impedenza caratteristica sia di 100 Ω e si calcoli poi la velocità di propagazione.



Soluzione:

La struttura presenta due condensatori in parallelo le cui capacità di sommano. Ognuna di esse, inoltre vale ¼ di quella riferita al coassiale completo (indicata con l'asterisco):

$$C_{TOT} = C_1 + C_2 = \frac{C_1^*}{4} + \frac{C_2^*}{4} = \frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}{2\ln(b/a)} + \frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}{2\ln(b/a)} = \frac{\pi\varepsilon_0}{2\ln(b/a)}\left(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}\right) = 1.15\cdot 10^{-11}\left(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}\right)$$

F/m

Il pedice 0 indica l'induttanza della struttura nel caso di permeabilità magnetica del vuoto.

Vale:

$$L_0 C_0 = \mu_0\varepsilon_0$$

Con:

$$C_0 = \frac{C_0^*}{2} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)} \Rightarrow L_0 = \frac{\varepsilon_0\mu_0}{C_0} = \frac{\mu_0}{\pi}\ln(b/a) = 4.8\cdot 10^{-7} \quad \text{[H/m}$$

Da cui si ottiene:

$$Z = \sqrt{\frac{L_0}{C_{TOT}}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_{TOT}}} = \sqrt{\frac{4.8\cdot 10^{-7}}{1.15\cdot 10^{-11}\left(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}\right)}} = 204.3\sqrt{\frac{1}{\left(1+\varepsilon_{r2}\right)}} = 100 \Rightarrow \varepsilon_{r2} = \frac{1}{(100/204.3)^2} - 1 = 3.17$$

Dunque:

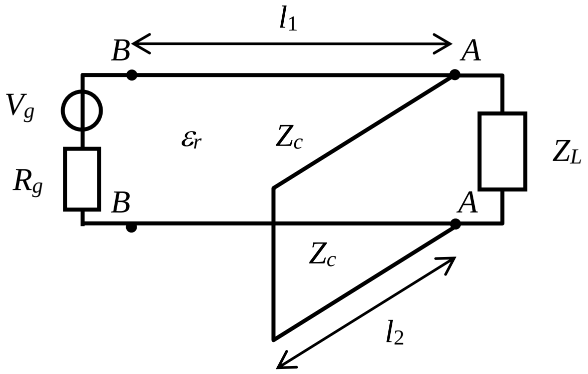
$$C_{TOT} = 1.15\cdot 10^{-11}\left(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}\right) = 9.64\cdot 10^{-11} \quad \text{F/m}$$

La velocità di propagazione risulta:

$$v = \sqrt{\frac{1}{C_{TOT}L_0}} = 2.08\cdot 10^{8} \quad \text{m/s}$$

Esercizio 4

Dato il circuito in figura, determinare la lunghezza l_2 del tratto di linea chiuso su un corto circuito e posto in parallelo alla sezione *A*, per avere un carico complessivo reale alla sezione *A*. In questa condizione determinare il rapporto tra la potenza assorbita dal carico e la potenza disponibile al generatore.



V_g = 100 cos(2π 600·10[6] *t*) (V)
Z_L = 100 + j 50 [Ω]
Z_c = 50 [Ω]
R_g = 75 [Ω]
ε_r = 2 (ovunque)
l_1 = 55 cm

Soluzione:

Dai dati si ottiene:

$$V_g = 100 \ \text{V}, \ f = 600 \ \text{MHz}, \ \lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{e_r}} \approx 0.3536 \ \text{m}.$$

Normalizzando il carico in AA si ottiene:

$$\overline{Z}_L = Z_L / Z_C = 2 + j \Rightarrow \overline{Y}_L = 1/\overline{Z}_L = 0.4 - j0.2$$

Per avere un carico reale alla sezione AA, la parte immaginaria dell'ammettenza dovuta al CC riportato in AA deve essere $\overline{Y}_{S,AA} = j0.2$. Il CC è un elemento solo reattivo che ha impedenza $\overline{Z}_S = 0 \ \Omega$ e dunque ammettenza $\overline{Y}_S = \infty$. Dalla carta di Smith, per ruotare in senso orario da $\overline{Y}_S = \infty$ a $\overline{Y}_{S,AA} = j0.2$ si copre una lunghezza normalizzata $\bar{l}_2 = l_2 / \lambda = 0.25 + 0.032 = 0.282$, da cui $l_2 = \bar{l}_2 \lambda \approx 0.099$ m.

Dunque, alla sezione AA il carico vale $\overline{Y}_{AA} = \overline{Y}_L + \overline{Y}_{S,AA} = 0.4 \quad \Rightarrow \quad \overline{Z}_{AA} = 2.5$.

Bisogna riportare il carico $\overline{Z}_{AA}$ alla sezione BB e lo si fa sulla carta di Smith:

$\overline{l}_1 = \dfrac{l_1}{\lambda} = 1.55$, ma ai fini della rotazione sulla carta di Smith si ha $\overline{l}_1 = 0.05$.

Ruotando di $\overline{l}_1 = 0.05$ in senso orario sulla carta di Smith con raggio costante si ha:

$$\overline{Z}_{BB} \approx 1.65 - j1.05 \Rightarrow Z_{BB} = \overline{Z}_{BB} Z_C = 82.5 - j52.5 \ \Omega$$

Si ricava dunque il coefficiente di riflessione alla sezione BB:

$$\Gamma = \frac{Z_{BB} - R_g}{Z_{BB} + R_g} = 0.14 \text{ - j}0.29 \ .$$

Si ha dunque, in queste condizioni, un rapporto tra la potenza assorbita dal carico (P_L) e la potenza disponibile al generatore (P_d) pari a:

$$\frac{P_L}{P_d} = \left(1 - |\Gamma|^2\right) = 0.898 \, .$$

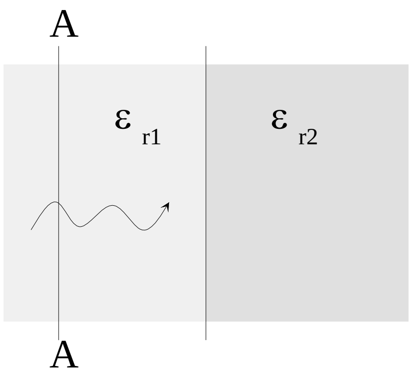
Con:

$$P_d = \frac{|V_g|^2}{8R_g} = 16.67 \text{ W}$$

Esercizio 5

Un'onda piana con frequenza 100 kHz si propaga in un mezzo con costante dielettrica relativa $\varepsilon_{r1} = 2$ e alla sezione A-A la sua densità di potenza è pari a S = 1 W/m^2. Ad una distanza λ dalla sezione A-A il mezzo presenta una discontinuità e la costante dielettrica relativa assume il valore $\varepsilon_{r2} = 10 - j$.

a) Esiste un'onda riflessa in A-A ?
b) Nel caso affermativo calcolare la densità di potenza dell'onda trasmessa all'interfaccia si separazione.



Soluzione:

a) Essendoci discontinuità nella percettività dielettrica, all'interfaccia si generano un onda riflessa e un onda trasmessa.

b) Bisogna calcolare il coefficiente di riflessione, che a sua volta richiede il calcolo della impedenza intrinseca del mezzo 1 e del mezzo 2. Nel caso di mezzi con perdite:

$$\eta_1 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}} = 266.6 \quad \Omega$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{j\omega\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_o}{j\omega\varepsilon_0(10-j)}} = 118.7 + \mathrm{j}5.9 \quad \Omega$$

Il coefficiente di riflessione vale:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -0.38 + \mathrm{j}\,0.02$$

La potenza trasmessa nel mezzo 2 (all'interfaccia) vale:

$$S_t = S\left(1 - |\Gamma|^2\right) = 0.8525 \quad \mathrm{W/m^2}$$