Campi Elettromagnetici – Proff. C. Capsoni, G. Gentili e C. Riva
Appello del 19 febbraio 2004

non scrivere nella zona soprastante

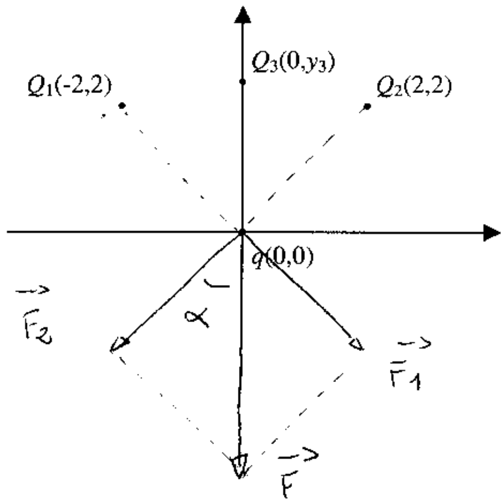
COGNOME E NOME ____________________

MATRICOLA____________________

FIRMA ____________________

Esercizio 1

Date 2 cariche fisse Q_1 e Q_2, con $Q_1 = Q_2 = Q$, agenti su una carica q, libera di muoversi nello spazio, determinare la posizione della carica $Q_3 = -Q$, posta sull'asse y, che tiene in equilibrio la carica q.



Soluzione:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

ma $\vec{F}_x = 0$ per simmetria, si ha che

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = \frac{Q\,q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \left(\sqrt{4+4}\right)^2} = \frac{Q\,q}{32\pi\varepsilon_0}$$

$$\vec{F}_y = -2\,|\vec{F}_1| \cos\alpha = -\frac{2Qq}{32\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{Qq\sqrt{2}}{32\pi\varepsilon_0}$$

↳ diretta come $-y$
(verso negativo dell'asse)

$$\vec{F}_{Q_3} = \frac{Q\,q}{4\pi\varepsilon_0 y^2}$$

Per avere equilibrio dovrà essere

$\vec{F}_{Q_3} = \vec{F}_y$ (in modulo) perciò:

$$\frac{Q q \sqrt{2}}{32\pi\varepsilon_0} = \frac{Q q}{4\pi\varepsilon_0 y^2}$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = \frac{8}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2{,}4$$

è accettabile solo la soluzione positiva (per $y < 0$ avrei $\vec{F}_{Q_3}$ e $\vec{F}_y$ equiverse e non si potrebbe avere equilibrio)

$$\Rightarrow \quad y = 2{,}4$$

Esercizio 2

Un cavo coassiale avente diametro esterno di 0.7 cm, diametro interno di 0.2 cm e ε_r=2.2, è attraversato da un'onda che trasporta una potenza di 3 W. Si calcoli:

a) la tensione e la corrente nel cavo;

b) il valore massimo del campo elettrico.

Soluzione:

a)

$$\eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{2,2}}$$

$$Z_c = \frac{\eta_0}{\sqrt{2,2} \cdot 2 \cdot \pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{377}{2\pi\sqrt{2,2}} \ln\left(\frac{0,7}{0,2}\right) = 50,68$$

$$P = \frac{|V|^2}{2Z_c} \Rightarrow |V| = \sqrt{2PZ_c} = 17,4 \text{ V}$$

$$|I| = \frac{|V|}{Z_c} = 0,34 \text{ A}$$

b)

$$E = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$$

$$V = -\int_b^a \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot r} \Rightarrow E_{max} \text{ si ha per } r = 0,2 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow E_{max} = 6,9 \frac{kV}{m}$$

Esercizio 3

Si consideri una superficie sferica di raggio 0.1 m (nel vuoto). Una carica puntiforme $Q = 10^{-12}$ C è posta nel centro. Si calcoli:

a) il flusso del campo elettrico attraverso la sfera;

b) l'integrale di linea del campo elettrico dal polo nord al polo sud della sfera.

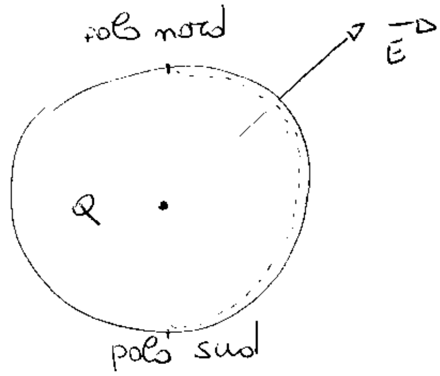
Soluzione:

a)

Per il teorema di Gauss si ha:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{10^{-12}}{8,854 \cdot 10^{-12}} = 0,113 \quad V \cdot m$$

b)



In ogni punto del cammino il campo $\vec{E}$ è perpendicolare al cammino stesso $\Rightarrow$ l'integrale di linea è <u>nullo</u>.

Esercizio 4

Sia data un'onda piana uniforme che si propaga alla frequenza di 300 MHz in direzione +z in un mezzo dielettrico con $\varepsilon_r = 4, \mu_r = 1, \sigma = 0$. Sapendo che il vettore fasore del campo elettrico in corrispondenza della sezione z=0 è pari a $\vec{E}(z=0) = 2\vec{a}_x$ (V/m), calcolare:

a) i vettori fasori di campo elettrico e magnetico in corrispondenza della sezione z = 5m;

b) le espressioni nel tempo dei corrispondenti vettori campo elettrico e magnetico.

Soluzione:

a)

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2}{3 \cdot 10^8} = 4\pi \text{ rad/m}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 60\pi \ \Omega$$

$$\vec{E}(z=5) = \vec{a}_x \cdot 2 \cdot e^{-j4\pi \cdot 5} = 2\vec{a}_x e^{-j20\pi}$$

$$\vec{H}(z=5) = \frac{2}{60\pi} e^{-j20\pi} \vec{a}_y = \frac{\vec{a}_y}{30\pi} e^{-j20\pi}$$

b)

$$\vec{\mathcal{E}}(t) = \mathrm{Re}\left\{ 2\vec{a}_x e^{-j20\pi} e^{j\omega t} \right\} =$$

$$= 2\cos(\omega t - 20\pi)\,\vec{a}_x$$

$$\vec{\mathcal{H}}(t) = \mathrm{Re}\left\{ \frac{\vec{a}_y}{30\pi} e^{-j20\pi} e^{j\omega t} \right\} =$$

$$= \frac{1}{30\pi}\cos(\omega t - 20\pi)\,\vec{a}_y$$

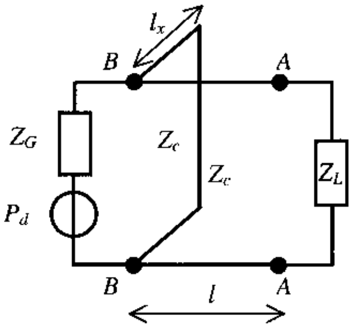
Esercizio 5

Il circuito in figura opera ad una frequenza f pari a 150 MHz (ε_r=2 ovunque).
Sapendo che la lunghezza l del tratto di linea (con impedenza caratteristica Z_c=50 Ω e ε_r=2) fra le sezioni *A-A* e *B-B*, è pari a 25 cm, calcolare:

a) la lunghezza l_x dello stub in corto circuito (con impedenza caratteristica Z_c=50 Ω e ε_r=2) collegato in parallelo alla sezione *B-B* in modo da minimizzare il coefficiente di riflessione visto dal generatore (con impedenza interna ZG=50 Ω) alla sezione *B-B*;

b) il modulo della tensione alla sezione *B-B*, $|V_{BB}|$, nelle condizioni di cui al punto a);

c) la potenza assorbita dal carico con e senza lo stub di lunghezza l_x calcolata al punto a).

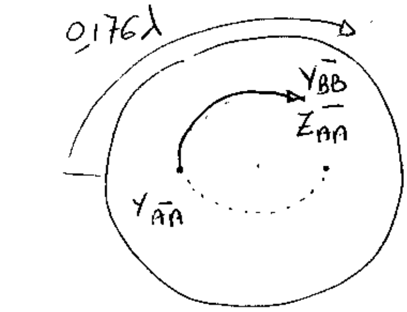


Z_L = 200 [Ω]
Z_c = 50 [Ω]
Z_G = 50 [Ω]
P_d = 100 [W]
l = 25 cm
f = 150 MHz
ε_r= 2 (ovunque)
l_x = ?

Soluzione:

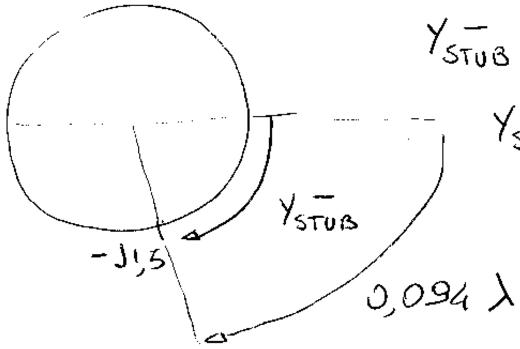
a) $$\lambda = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\cdot 10^8}{150\cdot 10^6\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ m.$$

$$\bar{Z}_L = \frac{200}{50} = 4 = \bar{Z}_{AA} \quad ; \quad \bar{l} = \frac{0,25}{\sqrt{2}}\lambda = 0,176\lambda$$



$$\bar{Y}_{AA} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$\bar{Y}_{BB} = 1 + j\,1,5$$



$$\bar{Y}_{STUB} = -j\,1,5$$

$$Y_{STUB} = -j\,\frac{1,5}{50} = -j\,0,03$$

$$\boxed{l_x = 0,094\lambda = 0,132\ m.}$$

(b)

Siamo in condizioni di adattamento:

$$P_d = \frac{1}{2} |V_{BB}|^2 \, Re\left[Y_{BB}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 100 = \frac{1}{2} \cdot |V_{BB}|^2 \cdot \frac{1}{50} \quad \Rightarrow \quad V_{BB} = 100\,V$$

(c)

Con lo stub

$$P_{ass} = P_d = 100\ W$$

Senza lo stub:

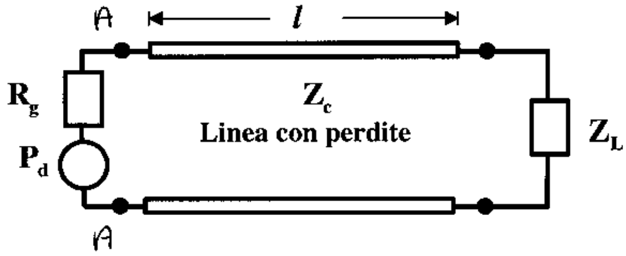
$$Y_{B\bar{B}} = 1 + j1,5 \quad \Rightarrow \quad Z_{B\bar{B}} = \frac{1}{Y_{B\bar{B}}} = 0,3 - j0,46$$

$$|\Gamma_g| = \left| \frac{Z_{B\bar{B}} - 1}{Z_{B\bar{B}} + 1} \right| = 0,6$$

$$P_{ass} = P_d \left(1 - |\Gamma_g|^2\right) = 100\,(0,64) = 64\ W$$

Esercizio 6:

Una linea di trasmissione avente impedenza caratteristica di 75 Ω (ε_r=1), attenuazione di 60 dB/km e lunghezza l = 30 m, collega un generatore (R_g = 50 Ω) ad un carico (Z_L = 20+20j Ω) alla frequenza di 300 MHz. Si calcoli la potenza erogata dal generatore sapendo che la potenza disponibile del generatore è di 50 W.



Soluzione:

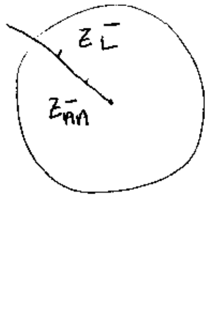
$$\alpha = 60 \ dB/_{Km} = \frac{60}{8{,}686 \cdot 1000} \ Np/_m = 6{,}91 \cdot 10^{-3} \ Np/_m \ ;$$

$$\bar{z}_L = \frac{20 + j20}{75} = 0{,}267 + j0{,}267 \ ;$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{300 \cdot 10^6} = 1 \ m \ ;$$

ℓ = 30m => compio 60 giri completi sulla carta di Smith; il modulo del coeff. di riflessione deve però essere ridotto tenendo conto delle perdite.

$$|\Gamma_L| = \left| \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} \right| = 0{,}6 \Rightarrow |\Gamma_{in}| = 0{,}6 \, e^{-2\alpha\ell} = 0{,}4$$



$$\bar{z}_{AA} = 0{,}46 + j0{,}23$$

$$Z_{AA} = \bar{z}_{AA} \cdot Z_c = 34{,}4 + j17{,}2$$

$$|\Gamma_g| = \left| \frac{Z_{AA} - Z_g}{Z_{AA} + Z_g} \right| = 0{,}27$$

$$P_{erogata} = P_d \left(1 - |\Gamma_g|^2\right) = 46{,}35 \ W$$